МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ УЧЕТЕ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Д. А. Баранова

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург

При деформировании срединной поверхности оболочки все точки получат перемещения. Связь деформаций через перемещения – геометрические соотношения теории оболочек – в срединной поверхности принимают вид [1]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}V - k_x W + \frac{1}{2}\theta_1^2;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}U - k_y W + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}U - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}V + \theta_1 \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right); \qquad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right).$$

Кроме того, если учитываются поперечные сдвиги (модель Тимошенко – Рейснера), то

$$\gamma_{xz} = k\, f(z)\,(\psi_x - \theta_1); \qquad \gamma_{yz} = k\, f(z)\,(\psi_y - \theta_2).$$

Здесь $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине оболочки; *A*, *B* – параметры Ляме.

Деформации в точках, расположенных на расстоянии *z* от координатной поверхности, выражаются соотношениями

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\,\chi_1; \;\; \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\,\chi_2; \;\; \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2\,z\,\chi_{12},$$

где функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} принимают вид

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\psi_y; \qquad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\psi_x;$$

$$2\,\chi_{12} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\psi_y\right).$$

Физические соотношения (связь напряжений и деформаций) для упругого изотропного материала оболочки на основе закона Гука будут иметь вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}; \;\; \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xz}.$$

Физические соотношения на основе деформационной теории пластичности имеют вид [2][3]

$$\sigma_x = \frac{E_c}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \qquad \sigma_y = \frac{E_c}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \qquad \tau_{xy} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{yz} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}; \quad \tau_{xz} = \frac{E_c}{2(1+\mu)}\gamma_{xz},$$

где E_c-секущий модуль упругости.

Физические соотношения при учете ползучести материала на основе линейной теории наследственной ползучести принимают вид [4]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z - \int_{t_0}^{t}\left(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z\right)R_1(t,s)ds\right];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z - \int_{t_0}^{t}\left(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z\right)R_1(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\gamma_{xy}^z - \int_{t_0}^{t}\gamma_{xy}^z R_2(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\gamma_{xz} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{xz} R_2(t,s)ds\right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\gamma_{yz} - \int_{t_0}^{t}\gamma_{yz} R_2(t,s)ds\right].$$

Здесь $R_1(t,s)$, $R_2(t,s)$ – функции влияния (ядра релаксации) материала при растяжении и сдвиге.

Если ребра вводятся по методу конструктивной анизотропии (при этом ребра должны быть часто расположены), то функционал полной энергии деформации оболочки, независимо от проявляемых свойств материала можно записать в виде

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b [N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\left(N_{xy} + N_{yx}\right)\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 +$$
$$+ \left(M_{xy} + M_{yx}\right)\chi_{12} + Q_x(\psi_x - \theta_1) + Q_y(\psi_y - \theta_2) - 2P_xU -$$
$$- 2P_yV - 2qW]ABdxdy. \qquad (1)$$

Здесь P_x, P_y, q – компоненты внешней нагрузки вдоль осей x, y, z.

Если решается линейно-упругая задача, то усилия и моменты имеют вид [5]

$$N_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(h + F_x\right)\varepsilon_1 + S_x\psi_1\right];$$

$$N_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(h + F_y\right)\varepsilon_2 + S_y\psi_2\right];$$

$$M_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[S_x\varepsilon_1 + \left(\frac{h^3}{12} + J_x\right)\psi_1\right];$$

$$M_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[S_y\varepsilon_2 + \left(\frac{h^3}{12} + J_y\right)\psi_2\right];$$

$$N_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)}\left[\left(h + F_y\right)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12}\right];$$

$$N_{yx} = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)}\left[\left(h + F_x\right)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12}\right];$$

$$M_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[S_y\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + J_y\right)\chi_{12}\right];$$

$$M_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[S_x\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + J_x\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_x = \frac{kE(h+F_x)}{2(1+\mu)}(\psi_x - \theta_1); \quad Q_y = \frac{kE(h+F_y)}{2(1+\mu)}(\psi_y - \theta_2).$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y + \mu\varepsilon_x$, $\psi_1 = \chi_1 + \mu\chi_2$, $\psi_2 = \chi_2 + \mu\chi_1$.

Приведенные жесткостные характеристики ребер с учетом сдвиговой и крутильной жесткости имеют вид

$$F_x = \sum_{i=1}^{n}\frac{h^i r_i}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{h^j r_j}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{h^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$F_y = \sum_{j=1}^{m}\frac{h^j r_j}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h^i r_i}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m}\frac{h^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}};$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n}\frac{S^i r_i}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{S^j r_j}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{S^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$S_y = \sum_{j=1}^{m}\frac{S^j r_j}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S^i r_i}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m}\frac{S^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}};$$

$$J_x = \sum_{i=1}^{n}\frac{J^i r_i}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{J^j r_j}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{J^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$J_y = \sum_{j=1}^{m}\frac{J^j r_j}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{J^i r_i}{\bar{b}} - \sum_{j=1}^{m}\frac{J^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}},$$

где

$$F^i = h^i; \; S^i = \frac{h^i(h+h^i)}{2};$$

$$J^i = 0{,}25h^2h^i + 0{,}5h(h^i)^2 + \frac{1}{3}(h^i)^3;$$

$$F^j = h^j; \; S^j = \frac{h^j(h+h^j)}{2};$$

$$J^j = 0{,}25h^2h^j + 0{,}5h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3;$$

$$F^{ij} = h^{ij}; \; S^j = \frac{h^{ij}(h+h^{ij})}{2};$$

$$J^{ij} = 0{,}25h^2h^{ij} + 0{,}5h(h^{ij})^2 + \frac{1}{3}(h^{ij})^3;$$

$$\bar{a} = aA, \bar{b} = bB\left(\frac{a}{2}\right).$$

При решении нелинейно-упругих задач обычно секущий модуль упругости, исходя из зависимости «$\sigma - \varepsilon$», аппроксимируется некоторым аналитическим выражением.

Аппроксимация секущего модуля в виде $E_c = E(1 - \omega(\varepsilon_i))$, когда $\omega(\varepsilon_i) = m\varepsilon_i^2$, справедлива при малой нелинейности кривой «$\sigma - \varepsilon$», полученной экспериментально для конкретного материала при одноосном растяжении.

При решении задач устойчивости подкрепленных оболочек вращения наиболее точная аппроксимация кривой «$\sigma - \varepsilon$» может быть получена, если кривая «$\sigma - \varepsilon$» (при сложном напряженном состоянии – это «$\sigma_i - \varepsilon_i$») задана характерными точками и по численному заданию графика «$\sigma_i - \varepsilon_i$» при полученном значении ε_i (найденном на предыдущей итерации, так как при решении физически-нелинейных задач удобно применять метод упругих решений А.А. Ильюшина) находится σ_i и за секущий модуль в точке с координатами x, y, z берется

$$E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}; \qquad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z\varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \frac{1}{4}\left((\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)}.$$

Заметим, что $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x, y, z)$, поэтому при изменении z меняется и σ_i, найденное из графической зависимости «$\sigma_i - \varepsilon_i$».

Таким образом, при вычислении интегралов по x, y в функционале (1) необходимо при каждом значении x и y вычислять интеграл по переменной z.

Если решается нелинейно-упругая задача, то усилия и моменты можно представить в виде

$$N_x = \frac{1}{1-\mu^2}\left[I_{1x}\varepsilon_1 + I_{2x}\psi_1\right];$$

$$N_y = \frac{1}{1-\mu^2}\left[I_{1y}\varepsilon_2 + I_{2y}\psi_2\right];$$

$$M_x = \frac{1}{1-\mu^2}\left[I_{2x}\varepsilon_1 + I_{3x}\psi_1\right];$$

$$M_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[I_{2y}\varepsilon_2 + I_{2y}\psi_2\right];$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2(1+\mu)}\left[I_{1y}\gamma_{xy} + 2I_{2y}\chi_{12}\right];$$

$$N_{yx} = \frac{1}{2(1+\mu)}\left[I_{1x}\gamma_{xy} + 2I_{2x}\chi_{12}\right];$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2(1+\mu)}\left[I_{2y}\gamma_{xy} + 2I_{3y}\chi_{12}\right];$$

$$M_{yx} = \frac{1}{2(1+\mu)}\left[I_{2x}\gamma_{xy} + 2I_{3x}\chi_{12}\right];$$

$$Q_x = \frac{kI_{1x}}{2(1+\mu)}\left(\psi_x - \theta_1\right); \qquad Q_y = \frac{kI_{2y}}{2(1+\mu)}\left(\psi_y - \theta_2\right).$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y + \mu\varepsilon_x$; $\psi_1 = \chi_1 + \mu\chi_2$, $\psi_2 = \chi_2 + \mu\chi_1$.

$$I_{1x} = \sum_{i=1}^{n}\frac{I_1^i r_i}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{I_1^j r_j}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{I_1^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$I_{1y} = \sum_{j=1}^{m}\frac{I_1^j r_j}{\bar{a}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{I_1^i r_i}{\bar{b}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{I_1^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}};$$

$$I_{2x} = \sum_{i=1}^{n}\frac{I_2^i r_i}{\bar{b}} + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{I_2^j r_j}{\bar{a}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{I_2^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$I_{2y}=\sum_{j=1}^{m}\frac{I_2^j r_j}{\bar{a}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{I_2^i r_i}{\bar{b}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{I_2^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}};$$

$$I_{3x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{I_3^i r_i}{\bar{b}}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{I_3^j r_j}{\bar{a}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{I_3^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_j}{\bar{a}};$$

$$I_{3y}=\sum_{j=1}^{m}\frac{I_3^j r_j}{\bar{a}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{I_3^i r_i}{\bar{b}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{I_3^{ij} r_i r_j}{\bar{a}\bar{b}}\right)\frac{r_i}{\bar{b}},$$

где

$$I_k^j=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h^j}E_c z^{k-1}dz;\;\; I_k^i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h^i}E_c z^{k-1}dz;\;\; I_k^{ij}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h^{ij}}E_c z^{k-1}dz;$$

k=1, 2, 3.

Если решается задача ползучести, то

$$N_x=N_x^У-\frac{2E}{1-\mu^2}\sum_{i=1}^{k}\left[(h+F_x)\varepsilon_1(t_{i-1})+S_x\psi_1(t_{i-1})\right]R1_{k,i-1};$$

$$N_y=N_y^У-\frac{2E}{1-\mu^2}\sum_{i=1}^{k}\left[(h+F_y)\varepsilon_2(t_{i-1})+S_y\psi_2(t_{i-1})\right]R1_{k,i-1};$$

$$M_x=M_x^У-\frac{2E}{1-\mu^2}\sum_{i=1}^{k}\left[S_x\varepsilon_1(t_{i-1})+\left(\frac{h^3}{12}+J_x\right)\psi_1(t_{i-1})\right]R1_{k,i-1};$$

$$M_y=M_y^У-\frac{2E}{1-\mu^2}\sum_{i=1}^{k}\left[S_y\varepsilon_2(t_{i-1})+\left(\frac{h^3}{12}+J_y\right)\psi_2(t_{i-1})\right]R1_{k,i-1};$$

$$N_{xy}=N_{xy}^У-\frac{2E}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left[(h+F_y)\gamma_{xy}(t_{i-1})+2S_y\chi_{12}(t_{i-1})\right]R2_{k,i-1};$$

$$N_{yx}=N_{yx}^У-\frac{2E}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left[(h+F_x)\gamma_{xy}(t_{i-1})+2S_x\chi_{12}(t_{i-1})\right]R2_{k,i-1};$$

$$M_{xy}=M_{xy}^У-\frac{2E}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left[S_y\gamma_{xy}(t_{i-1})+2\left(\frac{h^3}{12}+J_y\right)\chi_{12}(t_{i-1})\right]R2_{k,i-1};$$

$$M_{yx}=M_{yx}^У-\frac{2E}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left[S_x\gamma_{xy}(t_{i-1})+2\left(\frac{h^3}{12}+J_x\right)\chi_{12}(t_{i-1})\right]R2_{k,i-1};$$

$$Q_x=Q_x^У-\frac{2kE(h+F_x)}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left(\psi_x(t_{i-1})-\theta_1(t_{i-1})\right)R2_{k,i-1};$$

$$Q_y=Q_y^У-\frac{2kE(h+F_y)}{2(1+\mu)}\sum_{i=1}^{k}\left(\psi_y(t_{i-1})-\theta_2(t_{i-1})\right)R2_{k,i-1}.$$

Здесь $R1_{k,i-1}=R_1(t_k,t_{i-1})\Delta t;\quad R2_{k,i-1}=R_2(t_k,t_{i-1})\Delta t.$

Например, для оргстекла

$R(t,\tau)=Ae^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-1}$,

где $A_1=0{,}0269;\quad \beta_1=0{,}045\cdot10^{-3};\quad \alpha_1=0{,}05;$

$A_2=0{,}01318;\quad \beta_2=0{,}833\cdot10^{-3};\quad \alpha_2=0{,}20,$

и тогда

$$R1_{k,i-1} = A_1 e^{-\beta_1 (k-i+1)\Delta t} ((k-i+1)\Delta t)^{\alpha_1 -1} \Delta t;$$
$$R2_{k,i-1} = A_2 e^{-\beta_2 (k-i+1)\Delta t} ((k-i+1)\Delta t)^{\alpha_2 -1} \Delta t.$$
Для старого бетона
$$R_1(t,\tau) = \gamma E C_\infty e^{-\gamma(1+EC_\infty)(t-\tau)}; \quad R_2(t,\tau) = \frac{2G}{E} R_1,$$
где
$$\gamma_1 = 0{,}01; \quad E = 3\cdot 10^4; \quad C_\infty = 1\cdot 10^{-4};$$
и тогда $R1_{k,i-1} = \gamma E C_\infty e^{-\gamma(1+EC_\infty)(k-i+1)\Delta t} \Delta t.$

Литература:

1.Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
2.Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3.Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. – 420 с.
4.Ржаницын А. Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа. 1982. – 400 с.
5.Карпов В.В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. –СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.