К вопросу об оценке статистических характеристик снеговых нагрузок

К.Н. Сухина, В.А. Пшеничкина, Е.И. Журбина

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: В статье приведены результаты исследований фактической снеговой нагрузки и ее обеспеченности на основании статистических данных распределения годичных максимумов запаса воды в снеге, полученных на метеостанции Коломна. Проведен анализ реализаций ежегодных максимумов снеговой нагрузки по данным 13-ти метеостанций, расположенных в разных снеговых районах. Были определены все необходимые статистические характеристики снеговой нагрузки, а также параметры закона распределения Гумбеля для каждого снегового района.

Ключевые слова: снеговая нагрузка, распределение, годичные максимумы, снегосъемка, метеостанции, обеспеченность.

Вероятностные методы расчета, в отличие от детерминированных, требуют использования более обширной информации о случайных параметрах – законы распределения или статистические характеристики. Метод предельных состояний, регламентирует применение детерминированных методов расчета на нормативные, расчетные или средние значения учитываемых случайных параметров. При этом их нормативные значения обосновываются статистическими методами и имеют определенную степень обеспеченности. Основываясь на нормативных данных и исследованиях, посвященных нормированию параметров строительных конструкций [1-5], можно достаточно просто получить все необходимые вероятностные характеристики прочности материалов и действующих на конструкции нагрузок [6].

Рассмотрим снеговые нагрузки. Согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия» нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия определяется по формуле [7, (10.1)]:

$$S_0 = 0.7 c_e c_t \mu S_g \ , \qquad (1)$$

где S_g – вес снегового покрова на 1 м^2 горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ по таблице [7, табл. 10.1]:

Таблица № 1

Вес снегового покрова для снеговых районов РФ

Снеговые районы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
S_g, $\frac{\text{кПа}}{\text{кгс/м}^2}$	0,8 80	1,2 120	1,8 180	2,4 240	3,2 320	4,0 400	4,8 480	5,6 560

Значение S_g принимается как превышаемый в среднем один раз в 25 лет ежегодный максимум веса снегового покрова, определяемый на основе данных маршрутных снегосъемок о запасах воды, на защищенных от прямого воздействия ветра участках за период не менее 20 лет.

Множитель 0,7 – величина, обратная коэффициенту надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}4$, который является базовым в системе частных коэффициентов метода предельных состояний.

Схематично формирование снеговой нагрузки во времени представлено на рис. 1. В течение зимнего периода *i*-го года происходит постепенное накопление снега до максимального значения и последующее его таяние.

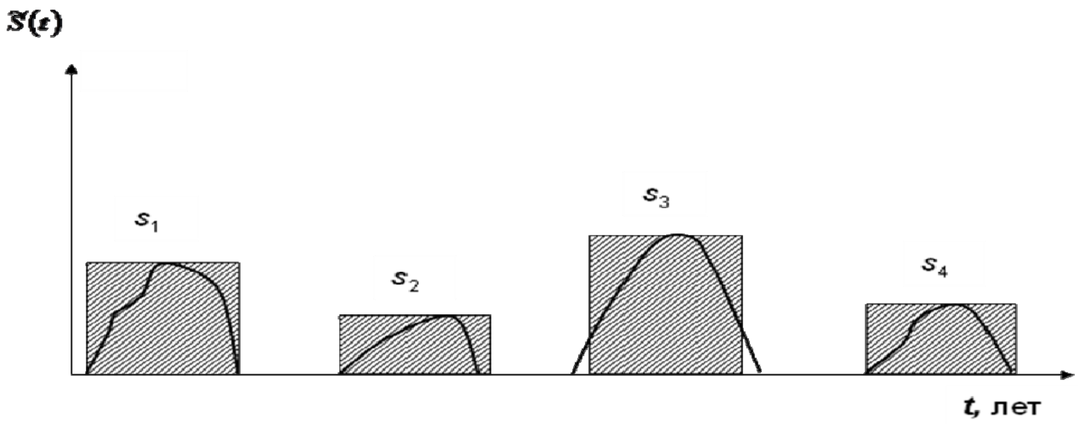

Рис.1. – Схема формирования снеговой нагрузки на протяжении *t* лет

Вероятностная модель снеговой нагрузки может быть представлена в виде последовательности независимых прямоугольных импульсов годичных максимумов со случайной интенсивностью $\tilde{S}$ и постоянной длительностью d=1год (рис.2). Срок службы сооружения обозначим как $T=kd$, измеряя время числом i (i=1, 2, …, k).

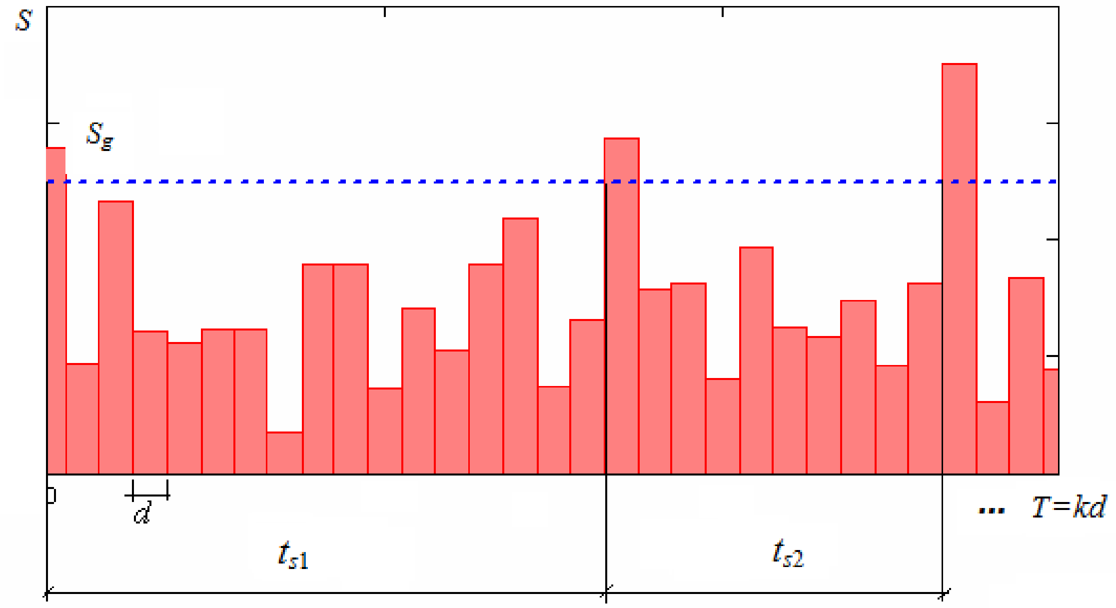

Рис.2. – Модель снеговой нагрузки в виде последовательности прямоугольных независимых импульсов

Обозначим на рис. 2 уровень нагрузки S_g, который может быть превышен в среднем 1 раз в 25 лет. Для каждой рассматриваемой последовательности интервалы t_{si} времени между пересечениями S_g являются реализациями случайной величины $\tilde{T}_s$ – периода повторяемости нагрузки, превышающий уровень S_g.

Плотность распределения $p_{T_S}(i)$ периода повторяемости $\tilde{T}_s$ для уровня S_g равна вероятности того, что в последовательности S первые (i-1) величин подряд меньше S_g, а затем появляется величина, большая S_g. В силу независимости последовательности значений S искомая вероятность вычисляется по закону умножения вероятностей с учетом вероятности $P(S > S_g)$:

$$P(T_S = i) = \left[P(S \le S_g)\right]^{i-1} P(S > S_g) = \left[F(S_g)\right]^{i-1}\left[1 - F(S_g)\right]. \qquad (2)$$

Функция распределения $F_{T_S}(i)$ находится суммированием плотности $p_{T_S}(i)$ от *j*=1 до *j*=*i*:

$$P(T_S \le i) = 1 - \left[F(S_g)\right]^i. \qquad (3)$$

Математическое ожидание периода повторяемости m_{T_S} равно

$$m_{T_S} = \frac{1}{1 - F(S_g)}, \qquad (4)$$

или обратное соотношение

$$F(S_g) = 1 - \frac{1}{m_{T_S}}. \qquad (5)$$

Таким образом, среднее значение периода повторяемости экстремальных значений нагрузки как последовательности независимых случайных импульсов может быть выражено через функцию распределения ординат нагрузки.

Уровень обеспеченности значения снеговой нагрузки для данного района формируется на основании представления статистических данных маршрутной снегосъемки о запасе воды в снежном покрове в виде последовательности ежегодных максимумов, которые рассматриваются как выборка независимых случайных величин, распределенных по закону Гумбеля [8].

Рассмотрим, как определяется нагрузка S_g и чему равна ее обеспеченность на примере статистических данных годичных максимумов запаса воды в снеге, полученных на метеостанции 27625 Коломна, имеющей следующие координаты: широта 55,13є, долгота 38,73є, высота 112 м.

В таблице 2 приведены максимальные за каждый год значения запаса воды (веса снегового покрова) с 1968 по 2011 гг. Прочерки в таблице означают отсутствие данных. Таким образом, рассматривается ряд из 41 значения S_i (i=1,2,…, k=41). Длительность интервала между значениями d=1 год. Вес снежного покрова на поверхности земли в кг/м^2 численно равен величине запаса воды в снежном покрове в мм.

Таблица № 2

Годичные максимумы запаса воды в снеге по данным маршрутных снегосъемок метеостанции 27625 Коломна

Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм	Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм	Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм
1968	148	1983	78	1998	106
1969	46	1984	39	1999	158
1970	154	1985	160	2000	81
1971	37	1986	184	2001	138
1972	-	1987	58	2002	92
1973	46	1988	97	2003	81
1974	50	1989	109	2004	73
1975	63	1990	73	2005	128
1976	-	1991	57	2006	166
1977	126	1992	78	2007	79
1878	-	1993	81	2008	60
1979	75	1994	150	2009	82
1980	65	1995	54	2010	116
1981	113	1996	79	2011	124
1982	70	1997	105		

Используя представленные в таблице 2 значения, найдем математическое ожидание и дисперсию веса снежного покрова для рассматриваемого района:

– математическое ожидание годичных максимумов m_S=96,44 кг/м2;

– дисперсия D_S=1618 (кг/м2)2.

Вычисляем стандарт $\sigma_S = \sqrt{D_S} = 40{,}22$ кг/м^2 и коэффициент вариации $f_S = \dfrac{\sigma_S}{m_S} = 0{,}42$.

Находим параметры закона Гумбеля:

$$a_S = \frac{1{,}28255}{\sigma_S} = 0{,}032; \quad u_S = m_S - \frac{0{,}577216}{a_S} = 78{,}34.$$

Плотность распределения максимумов (рис. 3):

$$p(S) = a_S \exp\{-a_S(S-u_S) - \exp[-a_S(S-u_S)]\} = \\ = 0{,}032\exp\{-0{,}032(S-78{,}34) - \exp[-0{,}032(S-78{,}34)]\} \qquad (6)$$

Функция распределения максимумов (рис.4):

$$F(S) = \exp\{-\exp[-a_S(S-u_S)]\} = \exp\{-\exp[-0{,}032(S-78{,}34)]\}. \qquad (7)$$

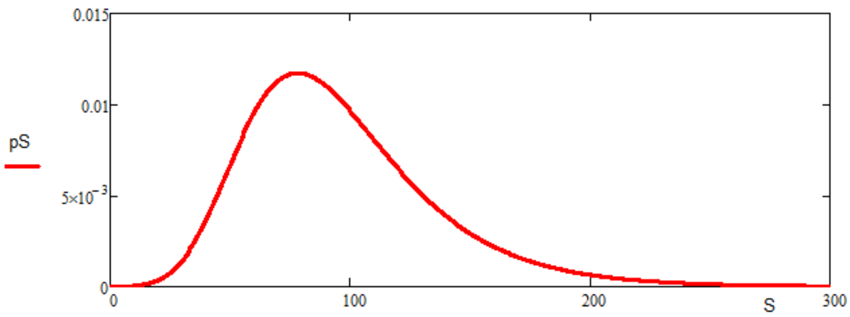

Рис. 3. – Плотность распределения случайной величины ежегодных максимумов веса снежного покрова. Коломна, 1968 – 2011 гг.

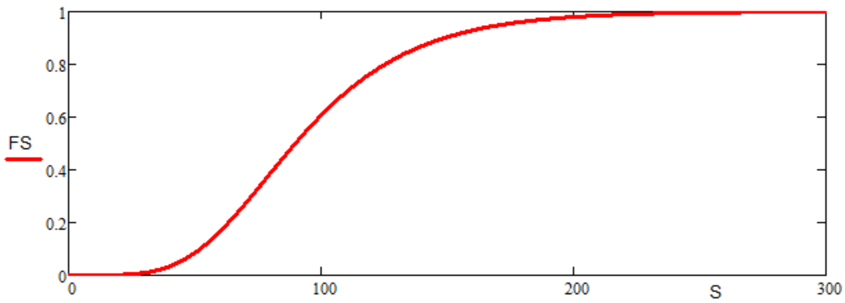

Рис. 4. – Функция распределения случайной величины ежегодных максимумов веса снежного покрова. Коломна, 1968 – 2011 гг.

Учитывая, что среднее значение периода повторяемости снеговой нагрузки составляет 25 лет, найдем значение S_q. Из формулы (5) получаем соответствующее $m_{T_S} = 25$ значение функции распределения

$$F\left(S_q\right) = 1 - \frac{1}{m_{T_S}} = 1 - \frac{1}{25} = 0{,}96,$$

то есть обеспеченность снеговой нагрузки S_q составляет 0,96.

Для нахождения значения S_q нужно решить уравнение:

$$F\left(S_q\right) = \exp\left\{-\exp\left[-0{,}032\left(S_q - 78{,}34\right)\right]\right\} = 0{,}96$$

относительно S_q:

$$S_q = u_S - \frac{1}{a_S}\ln\left\{-\ln\left[F\left(S_q\right)\right]\right\} = 78{,}34 - \frac{1}{0{,}032}\ln\left[-\ln(0{,}96)\right] = 178{,}66\,\text{кг/м2}$$

Таким образом, вес снегового покрова на поверхности земли, превышаемый в среднем 1 раз в 25 лет, вычисленный для района метеостанции «Коломна», составляет S_q=178,66 кг/м2. На основании карты снеговых районов находим, что Коломна относится к III снеговому району, для которого, согласно таблице 1, S_q=180 кг/м2.

При проведении вероятностных расчетов сооружений на действие различных нагрузок необходимо знать их законы распределения или, как минимум, статистические моменты. Покажем на примере снеговой нагрузки как определять все необходимые статистические характеристики, используя только их расчетные значения, приведенные в нормативных документах [7]. Для этого проведен анализ реализаций ежегодных максимумов снеговой нагрузки за аналогичный период наблюдений с 1968 по 2011 гг., полученных еще на 13 метеостанциях, расположенных в разных снеговых районах. Полученные значения их статистических характеристик снеговых нагрузок представлены в таблице 3.

Таблица № 3

Статистические характеристики снеговых нагрузок

п/п	Метео-станция	Номер снегового района	Расч. снег. нагрузка, кг/м2	Норм. снег. нагрузка, кг/м2	Статистические характеристики годовых максимумов			Параметры закона Гумбеля	
					M_S, кг/м2	σ_S, кг/м2	f_S кг/м2	a_S	u_S
1	Калач	III	180	126	58.49	22.25	0.38	0.058	46.94
2	Кострома	IV	240	168	131.35	37.83	0.29	0.034	114.37
3	Павловский Посад	III	180	126	104.46	37.49	0.36	0.034	87.48
4	Арзамас	III	180	126	87.71	35.5	0.4	0.036	71.68
5	Анна	III	180	126	104.77	39.1	0.37	0.032	86.73
6	Ростов Великий	IV	240	168	97.02	30.88	0.32	0.042	83.28
7	Воркута	V	320	224	176.42	74.42	0.42	0.017	142.47
8	Борисоглебск	III	180	126	97.41	41.22	0.42	0.031	78.79
9	Камышин	III	180	126	72.2	25.9	0.35	0.049	60.43
10	Рудня	III	180	126	60.64	34.36	0.57	0.037	45.04
11	Гагарин	III	180	126	84.77	33.91	0.40	0.038	69.58
12	Клин	III	180	126	93.38	38.64	0.41	0.033	75.88
13	Можайск	III	180	126	81.98	30.43	0.37	0.042	68.24

Найдем соотношение между расчетной снеговой нагрузкой, приведенной в табл.10.1 СП 20.13330.2011 и вероятностными характеристиками случайной последовательности годовых максимумов. Для этого запишем формулу индекса надежности для расчетного значения снеговой нагрузки:

$$\beta = \frac{S_q - m_s}{\sigma_s}. \tag{8}$$

Выразим переменные в правой части формулы (8) через параметры закона Гумбеля:

– расчетная нагрузка

$$S_q = u - \frac{1}{a}\ln\{-\ln(0.96)\} = u + \frac{3.199}{a}, \tag{9}$$

– математическое ожидание

$$m_s = u + \frac{0.577216}{a}, \tag{10}$$

– стандарт

$$\sigma = \frac{1.28255}{a}. \tag{11}$$

Откуда

$$\beta = \frac{\dfrac{u \cdot a + 3.199}{a} - \dfrac{u \cdot a + 0.577216}{a}}{\sigma = \dfrac{1.28255}{a}} = 2.044 \tag{12}$$

То есть, интервал $\lfloor m_s, S_q \rfloor$ соответствует 2.044 стандартам:

$$\beta = \frac{S_q - m_s}{\sigma_s} = \frac{S_q - m_s}{m_s \cdot f_s} = 2.044, \tag{13}$$

следовательно

$$S_q = m_s(1 + 2.044 f_s). \tag{14}$$

Учитывая, что коэффициент вариации ежегодных максимумов снеговой нагрузки для всех районов приблизительно одинаков f_s=0,4, выражение (14) можно записать в виде

$$S_q = 1.818 m_s. \tag{15}$$

Следовательно, для вычисления всех необходимых статистических характеристик снеговой нагрузки – математического ожидания, дисперсии, стандарта, закона распределения и его параметров – достаточно знать только ее расчетное значение, приведенное в СП 20.13320.2011 «Нагрузки и воздействия».

В таблице 4 для различных снеговых районов приведены статистические характеристики снеговой нагрузки, которые можно использовать в задачах вероятностного расчета. При этом очевидно, что погрешность при описании параметров нагрузки будет соответствовать погрешности, заложенной в методе предельных состояний.

Таблица № 4

Статистические характеристики снеговой нагрузки в зависимости от снегового района

п/п	Номер снего-вого района	Расчет. снег. нагрузка S_g по СП, кг/м2	Матем. ожида-ние M_s, кг/м2	Стан-дарт y_s кг/м2	Коэф. вариаци и f_s	Параметры закона Гумбеля	
						a_S	u_S
1	I	80	44.00	17.6	0.4	0.072	35.98
2	II	120	66.00	26.4		0.048	53.97
3	III	180	99.00	39.6		0.032	80.96
4	IV	240	132.01	52.80		0.024	107.96
5	V	320	176.02	70.41		0.018	143.95
6	VI	400	220.02	88.01		0,015	181.54
7	VII	480	264.03	105.61		0.012	215.93
8	VIII	560	308.03	123.21		0.010	250.31

Таким образом, показано, что по известным расчетным значениям снеговой нагрузки, приведенным в [7], можно достаточно просто получить статистические моменты случайной величины ее годичных максимумов, а также параметры закона распределения Гумбеля. Полученные характеристики являются исходными данными при проведении вероятностных расчетов конструкций и оценки их безопасности и долговечности [9,10,11].

Литература

1. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. С. 31-34

2. Raizer V.D. Theory of Reliability in Structural Desing. – Journal of Applied Mechanics Reviews, USA, 2004. – Vol.57. – Nol. – pp. 1-21.

3. Райзер В.Д. Теория надежности сооружений. Научное издание. – М.: Издательство АСВ, 2010. С.384

4. Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. С.285

5. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1994. С. 288 – перевод изд.: Gerhard Spaethe. – Die Sicherheit tragende Bankonstruktionen. – ISBN.5-274-01208-6.

6. Дородов П.В., Кулагин А.В. О запасе прочности и оценке надежности узлов металлоконструкций. // Инженерный Вестник Дона. №2. 2012. URL: ivdon.ru/uploads/article/doc/articles.810.big_image.doc

7. Свод правил: СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия» (Текст): нормативно-технический материал. М.: Минрегион России, 2011. С.98

8. Касьянов В.Е., Котесов А.А., Котесова А.А. Аналитическое определение параметров закона Вейбулла для генеральной совокупности конечного объема по выборочным данным прочности стали. // Инженерный

Вестник Дона. №2. 2012. URL: ivdon.ru/uploads/article/doc/articles.804.big_image.doc

9. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. С.158-161

10. Половко А.М. Основы теории надежности. М.: Издательство «Наука», 1964. С. 187-191, 269-274

11. Raizer V.D. Reliability of Structures. Analysis and Applications, Backbone Publishing Company. – New York, USA, 2009. – 146 p

References

1. Bolotin V.V. Prognozirovanie resursa mashin i konstrukcij. [Predicting resource of machines and structures]. M.: Mashinostroenie, 1984. pp 31-34

2. Raizer V.D. Journal of Applied Mechanics Reviews, USA, 2004. Vol.57. NoI. pp 1-21

3. Rajzer V.D. Teorija nadezhnosti sooruzhenij. Nauchnoe izdanie. [Reliability theory structures. Scientific publication]. M.: Izdatel'stvo ASV, 2010. 384 p

4. Rzhanicyn A.R. Teorija rascheta stroitel'nyh konstrukcij na nadezhnost'. [Theory of design of structures for reliability]. M.: Strojizdat, 1978. 285 p

5. Shpete G. Nadezhnost' nesushhih stroitel'nyh konstrukcij. [Reliability bearing structures]. M.: Strojizdat, 1994. 288 p. perevod izd.: Gerhard Spaethe. Die Sicherheit tragende Bankonstruktionen. ISBN.5-274-01208-6

6. Dorodov P.V., Kulagin A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). №2. 2012. URL: ivdon.ru/uploads/article/doc/articles.810.big_image.doc

7. Svod pravil: SP 20.13330.2011 «Nagruzki i vozdejstvija» (Tekst): normativno-tehnicheskij material. [«Loads and effects» (Text): legal and technical material]. M.: Minregion Rossii, 2011. 98 p

8. Kas'janov V.E., Kotesov A.A., Kotesova A.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). №2. 2012. URL: ivdon.ru/uploads/article/doc/articles.804.big_image.doc

9. Bolotin V.V. Primenenie metodov teorii verojatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij. [Application of probability theory and the theory of reliability analysis of structures]. M.: Strojizdat, 1971. pp 158-161

10. Polovko A.M. Osnovy teorii nadezhnosti. [Basic theory of reliability]. M.: Izdatel'stvo «Nauka», 1964. pp 187-191, 269-274

11. Raizer V.D. Reliability of Structures. Analysis and Applications, Backbone Publishing Company. New York, USA, 2009. 146 p

12. Losida Z. et al. Physical studies on deposited snow. Thermal properties Contrib. Inst of Low Temp. Sci. Hokkaido Univ., Sapporo, 1955.Ser.A. vol.27. pp 19-74