Исследование напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости

А.С. Личковаха[1], Б.А. Шемшура[1], С.А. Кузнецов[2]

[1]Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС)

[2]Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ), Новочеркасск

Аннотация: Проблема формализации упругой линии тонкой стальной полосы большой гибкости возникла в процессе создания упругих элементов с нелинейной характеристикой для применения в различного рода демпфирующих устройствах. Такие упругие стержни испытывают большие перемещения при работе материала в пределах упругости, в частности, при осевом нагружении в закритической области, когда осевая нагрузка превышает Эйлерову силу, однако в докритической области перемещения недостаточно значительны для получения регрессивно-прогрессивной характеристики. В работе исследуются возможности смягчения упругой характеристики при осевом нагружении в начальный период путем применения жесткого консольного плеча, установленного на конце упругого стержня с приложением к нему вертикальной нагрузки. Одновременно исследуется влияние на упругую характеристику круговой траектории точки приложения вертикальной силы. Для формализации напряженно-деформированного состояния тонкой стальной пластины большой гибкости применяется метод эллиптических параметров.

Ключевые слова: упругая линия, тонкая полоса, большая гибкость, формализация, внеосевое нагружение, эллиптические параметры, регрессивно-прогресивная характеристика.

Проблема формализации упругой линии тонкой стальной полосы большой гибкости возникла в процессе создания упругих элементов с нелинейной характеристикой для применения в различного рода демпфирующих устройствах [1,2]. Такие упругие стержни испытывают большие перемещения при работе материала в пределах упругости, в частности, при осевом нагружении в закритической области, когда осевая нагрузка превышает Эйлерову силу, однако в докритической области перемещения недостаточно значительны для получения регрессивно-прогрессивной характеристики [1].

В настоящей работе исследуются возможности смягчения упругой характеристики при осевом нагружении в начальный период путем применения жесткого консольного плеча, установленного на конце упругого стержня с приложением к нему вертикальной нагрузки. Одновременно исследуется влияние на упругую характеристику круговой траектории точки приложения вертикальной силы. Методы расчета внецентренно сжатых железобетонных стоек анализировались, в частности, в работе [3], но для формализации напряженно-деформированного состояния тонких стальных пластин большой гибкости перспективным представляется использование метода эллиптических параметров [4-7].

На рис. 1,*а* приведена система в начальном положении. Рассматриваемая система, состоит из упругого стержня «*OA*», жёсткого плеча «*AB*» и жёсткого рычага «*BD*». Упругий стержень «*OA*» одним концом закреплён шарниром в точке «*O*», а другим концом жёстко соединён под прямым углом с плечевой консолью «*AB*», соединённой шарниром в точке «*B*» с рычагом «*BD*», который другим концом шарнирно закреплён в точке «*D*». К шарниру «*B*» прикладывается направленная вертикально сила *G* рис. 1, *б*. Деформированное состояние системы определяется величиной силы *G* и геометрическими параметрами стержней. Система в нагруженном состоянии показана на рис. 1,*б*.

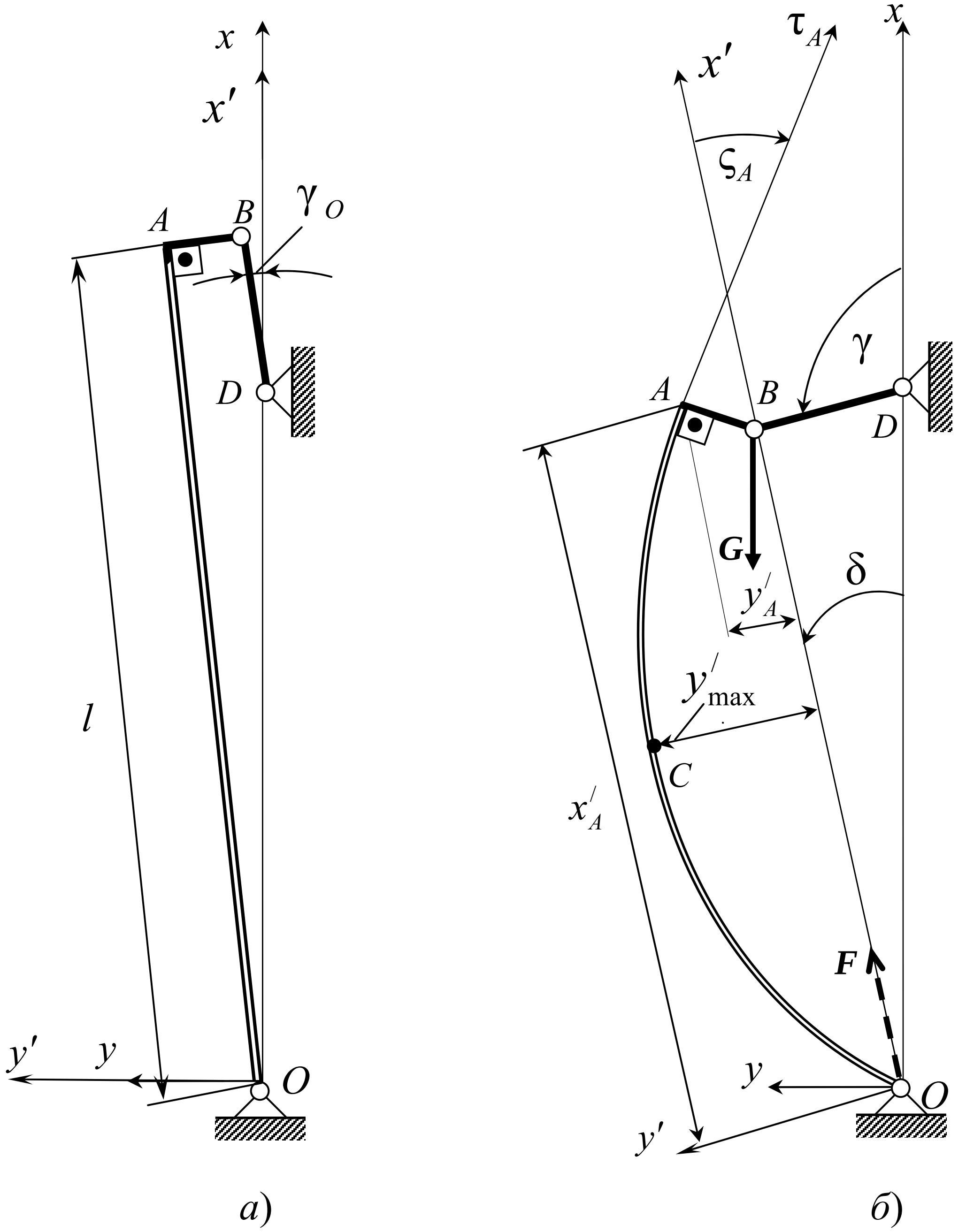

Рис. 1. – Расчетная схема упругой системы

Согласно [4] для решения задачи методом эллиптических параметров используются правые системы координат. Одна из этих систем xOy неподвижна, а другая $x'Oy'$ ориентирована так, что ось x' совпадает всё время с направлением сжимающей упругий стержень силы F, приложенной всё время в начале координат т. «O» рис. 1,*б*.

На рис.1,*б* обозначены углы:

δ – угол между осями x и x'

ζ_A – угол между касательной (τ_A), проведённой в концевой точке «*A*» упругой линии стержня и осью x',

γ – угол отклонения рычага «*BD*» от вертикали.

Обязательное расположение шарниров «*O*» и «*D*» на одной вертикали необходимо для того, чтобы в заданном диапазоне нагрузок система при любом возмущении под действием реакции упругого стержня возвращалась в первоначальное положение.

Методика расчета предложена Е.П. Поповым [4] на основе решения точного дифференциального уравнения упругой линии гибкого стержня (1).

$$l^2 \frac{d^2\varsigma}{ds^2} = -\beta^2 \sin\varsigma, \qquad (1)$$

где l – длина гибкого стержня «*OA*» (рис. 1,а),

ζ – угол между касательной, проведённой в текущей точке упругой линии гибкого стержня и осью x',

β – силовой коэффициент подобия, который в зависимости от сжимающей стержень силы определяется по формуле (2), а в зависимости от конфигурации упругой линии – по формуле (3):

$$\beta = l\sqrt{\frac{F}{H}}\ ; \qquad (2)$$

$$\beta = F(\psi_A) - F(\psi_O)\,, \qquad (3)$$

здесь $H = EJ_{min}$ – изгибная жёсткость, E – модуль упругости, J_{min} – минимальный момент инерции гибкого стержня,

ψ_A и ψ_o– эллиптические амплитуды в конечной и начальной точках гибкого стержня (точка *A* и точка *O* на рис. 1),

$F(\psi_A)$ и $F(\psi_o)$ – эллиптические интегралы Лежандра первого рода.

Для произвольного значения эллиптической амплитуды ψ эллиптические интегралы Лежандра первого рода *F(ψ)* и используемые в дальнейшем эллиптические интегралы Лежандра второго рода *E(ψ)* определяются соответственно по формулам (4) и (5):

$$F(\psi) = \int_{\psi_O}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{4}$$

$$E(\psi) = \int_{\psi_O}^{\psi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi, \tag{5}$$

здесь $k = \sin\alpha$ – модуль, α – модулярный угол эллиптического интеграла.

Так как эллиптические интегралы не берутся в элементарных функциях, то они должны определяться либо по таблицам, приведённым в [6] , либо по приближённым формулам [8,9]. В настоящее время для определения эллиптических интегралов можно использовать ПО *Mathcad.*

Зависимость между модулем k и углом касательной к упругой линии с осью x', и эллиптической амплитудой ψ имеет вид

$$\sin\frac{\varsigma}{2} = k\sin\psi\ . \tag{6}$$

Связь между кривизной изогнутой оси стержня χ и упругими параметрами в [6] установлена в виде

$$\chi = \frac{d\varsigma}{ds} = 2\frac{\beta k}{l}\cos\psi\,. \tag{7}$$

Координаты точки «А» в системе $x'Oy'$ определяются по формулам

$$x'_A = l\{\frac{2}{\beta}[E(\psi_A) - E(\psi_O)] - 1\}, \tag{8}$$

$$y'_A = \frac{2kl}{\beta}[\cos(\psi_O) - \cos(\psi_A)]\ . \tag{9}$$

В неподвижной системе *xOy* – по формулам:

$$x_A = x_A^{'} \cos\delta + y_A^{'} \sin\delta\ ; \qquad (10)$$

$$y_A = y_A^{'} \cos\delta - x_A^{'} \sin\delta\ . \qquad (11)$$

Изгибающий момент в любом сечении стержня определяется по формуле

$$M = \frac{2kFl\cos\psi}{\beta} - H\chi_0, \qquad (12)$$

где χ_0 – начальная кривизна упругого стержня. В рассматриваемой задаче предполагается, что первоначальное положение стержня «*OA*» является прямолинейным, поэтому $\chi_0 = 0$.

Вертикальное перемещение точки приложения силы *G* (т. «*B*»)

$$h_B = h(\cos\gamma_0 - \cos\gamma)\,, \qquad (13)$$

где *h* – длина рычага *BD* (рис. 1).

Уравнения равновесия сил, действующих на систему OAB (рис. 2,*а*):

$$\left.\begin{array}{l} F\sin\delta - R_{BD}\sin\gamma = 0; \\ F cos\delta - R_{BD}\cos\gamma - G = 0. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Из (14) определяется зависимость $G = f(F, \delta, \gamma)$

$$G = F(\cos\delta - \frac{\sin\delta}{tg\gamma})\,. \qquad (15)$$

Для определения напряжённо-деформированного состояния упругого стержня в рассматриваемой задаче используем следующие граничные условия. Первое граничное условие: при $s = 0$ в точке «*O*» изгибающий момент равен нулю и из равенства (12) следует $cos\psi_0 = 0$. Тогда согласно [6] при кривизне $\chi < 0$ и $\varsigma_O > 0$ начальная эллиптическая амплитуда принимается равной $\psi_0 = \pi/2$. При переходе от точки «*O*» к точке «*A*» значение эллиптической амплитуды должно возрастать. В характерной точке (на рис. 1,*б* это точка сжатия «*C*») эта амплитуда должна быть кратной $\pi/2$, то есть $\psi_C = \pi$.

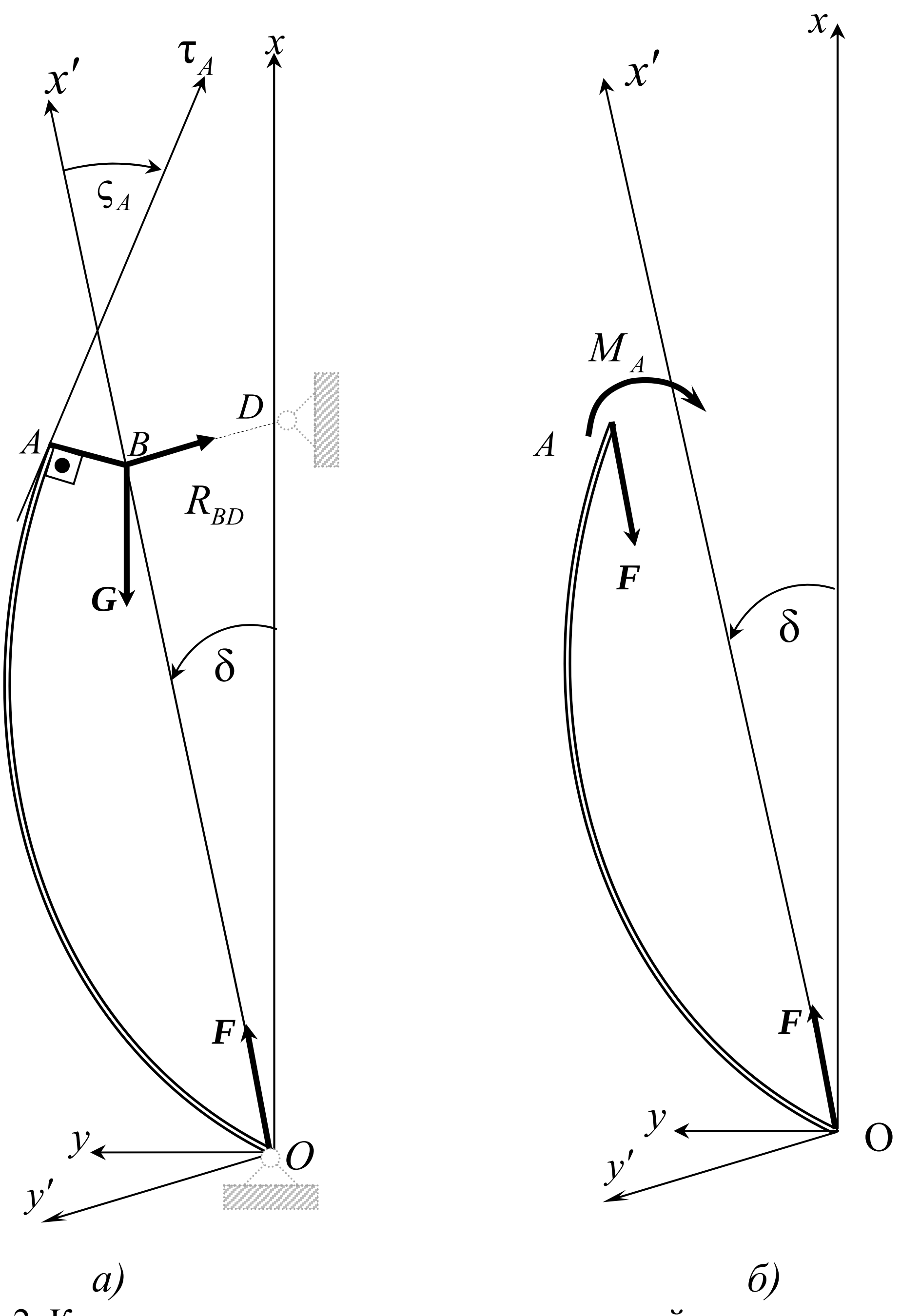

Рис. 2. К выводу уравнения равновесия упругой системы

Значение эллиптической амплитуды в точке «*A*» неизвестно. Это значение может быть определено из второго граничного условия (рис. 2,*б*): при $s = l$ изгибающий момент в сечении «*A*» равен

$$M_A = -Ft\cos\varsigma_A\,, \tag{16}$$

где $t = AB$ – длина плечевой консоли.

Момент принимает отрицательное значение, так как кривизна упругой линии $\chi < 0$. Используя для концевой точки «*A*» равенства (2), (12) и (16), получим

$$2k\cos\psi_A = -\frac{\beta}{l}t\cos\varsigma_A\,. \tag{17}$$

С учётом того, что $\cos\varsigma_A = 1 - 2\sin^2\frac{\varsigma_A}{2}$ второе граничное условие (17) представим в виде

$$\frac{2k\cos\psi_A}{\beta\cdot(1 - 2k^2\sin^2\psi_A)} = -\frac{t}{l}\,. \tag{18}$$

Алгоритм решения задачи с использованием ПО *Mathcad* состоит в следующем. Для положения системы, когда при первоначальном угле отклонения поводка γ_0 гибкий стержень прямолинеен и заданы геометрические размеры *t, l, h*, а также изгибная жёсткость гибкого стержня *H* и координата точки «*D*» задаётся модулярный угол эллиптического интеграла α ($0 \le \alpha \le \pi/2$) и вычисляется значение модуля *k*. Эллиптическую амплитуду ψ_A (в точке *A*) определяем в *Mathcad* с помощью функции *root* из трансцендентного уравнения (18) (начальное значение ψ_A задаем равным π, так как в точке сжатия «*C*» $\psi_C = \pi$). При этом с учетом (4) и приближённых формул, полученных в работе [6] силовой коэффициент подобия (3), в зависимости от конфигурации упругой линии в конечной точке *A* (см. рис. 1) и начальной точке *O* гибкого стержня определяется по формуле

$$\beta = \frac{\psi_A}{\cos\alpha}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\psi_A}{2\psi_A}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{19}$$

Полученное значение ψ_A позволяет проводить все дальнейшие расчёты и исследования деформированного гибкого стержня.

ПРИМЕР. Исследуется стальной упругий стержень *OA* (рис. 1) в виде полосы длиной $OA = l = 0{,}4$ м с поперечным прямоугольным сечением 0,6 x 5,1 мм, у которого: осевой момент инерции $J_{min} = 9{,}18 \cdot 10^{-14}$ м^4, момент сопротивления $W = 3{,}06 \cdot 10^{-10}$ м^4 и изгибная жёсткость $H = 0{,}01836$ Нм^2. Длина плеча $AB = t = 0{,}04$ *м*, длина рычага $BD = h = 0{,}08$ *м.*, длина стойки $OD = 0{,}3216$ *м,* $\gamma_o = 10^o$.

Решение. Для определения эллиптической амплитуды ψ_A используя ПО *Mathcad* решаем трансцендентное уравнение (18) в соответствии с исходными данными. Силовой коэффициент β определяем также с помощью ПО *Mathcad* по формуле (3), взяв интеграл (4) в пределах от ψ_0 до ψ_A. Далее определяем угол ζ_A между касательной к упругой линии в точке *A* и осью x' из формулы (6). Угол получается отрицательным всегда, в данной схеме нагружения, так как $\chi < 0$. Зная силовой коэффициент β, силу *F* сжимающую стержень, определяем из формулы (2). Длина хорды «*OB*» равна: $OB = x'_A - t\sin\varsigma_A$, где x'_A координата точки «А» в системе $x'Oy'$. Определяем x'_A с помощью ПО *Mathcad* по формуле (8), взяв интеграл (5) в пределах от ψ_0 до ψ_A. Угол между осями x и x' по теореме косинусов равен

$$\delta = \arccos\frac{(OB)^2 + (OD)^2 - (BD)^2}{2 \cdot OB \cdot OD}.$$

Угол отклонения поводка *BD* от вертикали $\gamma = \pi - \angle BDO$, где угол *BDO* определяем также по теореме косинусов:

$$\angle BDO = \arccos\frac{(BD)^2 + (OD)^2 - (OB)^2}{2 \cdot OD \cdot BD},$$

Из (15) определим величину силы G, соответствующую полученной конфигурации рассматриваемой системы. Вертикальное перемещение h_B точки приложения силы G (т. «B») определяем по формуле (13).

Согласно теоретическим предпосылкам максимальный прогиб упругого стержня имеет место в точке сжатия; при соответствующих заданных параметрах прогиб определим по формуле:

$$f_{max} = y'_{max} - y'_A = \frac{2kl}{\beta}[\cos(\psi_O) - \cos(\psi_C)] - t \cdot \cos\varsigma_A . \quad (20)$$

Максимальный изгибающий момент будет также в сечении, где находится точка сжатия, согласно (12) момент равен:

$$M = \frac{2kFl\cos\psi}{\beta} - H\chi_C . \quad (21)$$

где $\chi_C = -\frac{8f_{max}}{l^2}$ - фактическая кривизна упругого стержня.

Знак изгибающего момента при использовании метода эллиптических параметров [4] должен совпадать со знаком кривизны упругого стержня, которая в данной задаче отрицательна.

Максимальное нормальное напряжение определим по формуле:

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max}}{W} .$$

В таблице №1 приведены результаты расчётов для схемы на рис.1 с приведенными параметрами.

Таблица № 1

Расчетные параметры упругой системы

Вычисляемые параметры	Значения параметров									
α, град.	5	10	12,7	17,5	20	24	26,8	30	32,7	33,5
ψ_A, град.	188,6	228	236,7	247	250	255	258	260,56	262,6	263
ζ_A, град.	-1,5	-14,8	-21,2	-32,1	-37,6	-46,3	-52,3	-59,1	-64,8	- 66,45
β	1,72	2,4	2,6	2,79	2,88	3	3,09	3,2	3,26	3,29
F, Н	0,34	0,67	0,77	0,89	0,95	1,03	1,09	1.16	1,22	1,24
ОВ, см	39,6	38	36,89	34,7	33,3	31	28,9	26,77	24,7	24,1
δ, град	5,2	9,26	10,94	13,3	14,1	14,6	14,1	11,93	6,74	2,33
γ, град	26,28	48,7	59,5	78,7	88	106	119,3	137,1	159,1	173,1
G, Н	0,27	0,56	0,67	0,83	0,92	1,07	1,21	1,4	1,6	1,66
h_B, см..	0,7	2,65	3,9	6,4	7,8	10,3	12	14,1	15,6	16
f_{max}, см.	0,046	1,8	3,07	5,2	6,33	8,1	9,24	10,5	11,54	11,8
$\lvert M_{max}\rvert$,Нм	0,013	0,021	0,024	0,029	0,032	0,038	0,043	0,0495	0,056	0,058
σ_{max},МПа	43,7	69,6	78,5	95,3	105	124	140	161,6	183	189,8

На рис. 3 приведены зависимости вертикального перемещения точки «*B*» от нагрузки *G*, действующей на упругий стержень с плечом, полученные экспериментально (1), теоретически (2) и с помощью расчетного комплекса ANSYS (3).

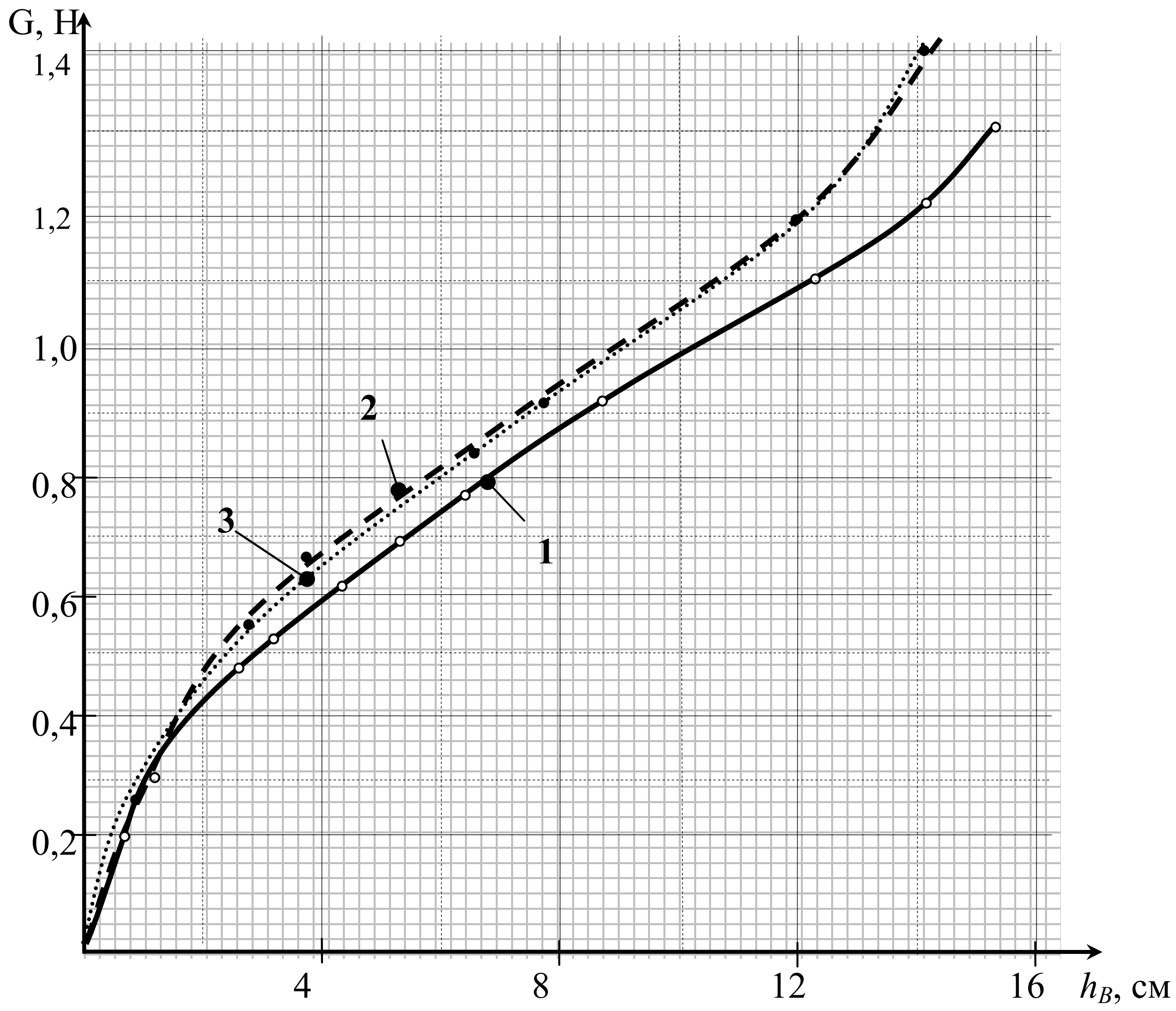

Рис. 3. – Зависимости вертикального перемещения точки В от нагрузки G

Результаты, полученные с помощью расчетного комплекса ANSYS [10] для системы с данными геометрическими параметрами достаточно хорошо коррелируются как с выведенными теоретическими зависимостями, так и с опытными данными, полученными экспериментально. Из диаграммы следует, что внецентренное сжатие упругого элемента формирует регрессивный участок упругой характеристики, а круговая траектория точки приложения вертикальной силы формирует прогрессивный участок. Некоторое расхождение теоретических зависимостей с экспериментальными связано с использованием в расчетах табличного значения модуля упругости.

Литература

1. Личковаха А.С., Шемшура Б.А., Кузнецов С.А. Исследование деформации стержня большой гибкости при осевом нагружении // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Технические науки. 2016. №3. С. 71-76.
2. Языев Б.М., Смирнов И.И., Захарова К.В. Методика расчета силовой характеристики ленточного упругопластического элемента // Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2140/.
3. Маилян Д.Р, Мурадян В.А. К методике расчета железобетонных внецентренно сжатых колонн // Инженерный вестник Дона, 2012, № 4. URL: ivdon.ru /magazine/archive/n4p2y2012/1333/.
4. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. 296с.
5. Kollbrunner Curt F, Meister Martin. Knicken, Biegedrillknicken, Kippen: Theorie und Berechnung von Knickstäben Knickvorschriften. Berlin: Springer-Verlag, 1961. 320 s.
6. Анфилофьев А. В., Замятин В. М. Геометрическое представление эллиптических интегралов // Известия Томского политехнического университета [Известия ТПУ]. 2005. Т. 308. № 5. С. 11-14.
7. Mises R. Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes // Z. angew Math. Mech. 1924. Bd 4. ss. 435–436.
8. Пономарёв С.Д., Бидерман В.Л., Феодосьев В.И. Расчёты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1956. Т.1. 886с.
9. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400с.

10. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК. 2005. 640с.

References

1. Lichkovaha A.S., Shemshura B.A., Kuznecov S.A. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-kavkazskij region. Tehnicheskie nauki. 2016. №3. pp. 71-76.

2. Jazyev B.M., Smirnov I.I., Zaharova K.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4 URL: ivdon.ru /ru/magazine/archive/n4y2013/2140/.

3. Mailjan D.R., Muradjan V.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1333/.

4. Popov E.P. Teorija i raschet gibkih uprugih sterzhnej [Theory and calculation of flexible elastic rods]. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. 296 p.

5. Kollbrunner Curt F, Meister Martin. Knicken, Biegedrillknicken, Kippen: Theorie und Berechnung von Knickstäben Knickvorschriften. Berlin: Springer-Verlag, 1961. 320 p.

6. Anfilof'ev A. V., Zamjatin V. M. Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta [Izvestija TPU]. 2005. V. 308. № 5. pp. 11-14.

7. Mises R. Z. angew. Math. Mech. 1924. Nach 4. pp. 435–436.

8. Ponomarjov S.D., Biderman V.L., Feodos'ev V.I. Raschjoty na prochnost' v mashinostroenii [Strength calculation in mechanical engineering]. M.: Mashgiz, 1956. V.1. 886 p.

9. Feodos'ev V.I. Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniju materialov [Selected tascs and questions on the resistans of materials]. M.: Nauka, 1973. 400 p.

10. Basov K.A. ANSYS: Spravochnik pol'zovatelja [User`s quide]. M.: DMK. 2005. 640 p.