Инженерный вестник Дона, №2 (2018)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4984

Дифференциально-игровые модели коррупции при распределении ресурсов

М.Х. Мальсагов[1], *Г.А. Угольницкий*[2]

[1]*Ингушский государственный университет, Назрань*

[2]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Аннотация: Рассмотрены дифференциально-игровые модели коррупции при заданном механизме распределения ресурсов в нормальной форме и в форме характеристической функции. Найдены в явной форме равновесие Нэша и вектор Шепли, во втором случае описана процедура распределения дележа для обеспечения динамической устойчивости.
Ключевые слова: дифференциальные игры, коррупция, процедура распределения дележа, распределение ресурсов.

Введение

Авторская концепция математического моделирования коррупции в иерархических системах управления изложена в [1]. В этой монографии рассмотрены статические и динамические модели административной и экономической коррупции и их приложения, основные гипотезы и принципы моделирования. В настоящей статье изучаются динамические модели коррупции при заданном механизме распределения ресурсов, при этом в качестве математического аппарата используются дифференциальные игры. Дифференциальные игры в нормальной форме описаны в [2,3] в форме характеристической функции (кооперативные дифференциальные игры) - в [4-7]. В первом случае в качестве решения обычно принимается равновесие Нэша, во втором наибольшей популярностью пользуется вектор Шепли как всегда существующее и единственное значение игры. Ключевое место здесь принадлежит проблеме динамической устойчивости решений игры [8], для обеспечения которой Л.А. Петросян предложил специальную процедуру распределения дележа [4]. Авторский подход к кооперативно-игровому моделированию на примере социального партнерства в системе образования изложен в [9,10].

Дифференциально-игровая модель в нормальной форме

Исходная модель распределения ресурса имеет вид

$$J_S = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{ s_0 x(t) + [1 - Mz(t)]\sum_{i\in N} b_i(t) r_i(t) \right\} dt + g_S(x(T)) \to \max \qquad (1)$$

$$r_i(t) \geq 0; \sum_{i\in N} r_i(t) \leq R; \qquad (2)$$

$$J_i = s_i \int_0^T e^{-\rho t}[1 - b_i(t)] r_i(t) dt + g_i(x(T)) \to \max \qquad (3)$$

$$0 \leq b_i(t) \leq 1, \quad i \in N; \qquad (4)$$

$$\dot{x} = \sum_{i\in N} a_i \sqrt{(1-s_i)(1-b_i(t)) r(t)}, \quad x(0) = x_0. \qquad (5)$$

Моделируемая система включает взяточника - супервайзера (S) и агентов (взяткодателей) из множества N={1,...,n}. Соответственно, J_S и J_i - выигрыши супервайзера и агентов; T - период рассмотрения; ρ - коэффициент дисконтирования; x - величина некоторого производимого агентами блага; s_0 - официальное вознаграждение супервайзера за единицу x; R - величина ресурса в распоряжении супервайзера; $r_i(t)$ - доля ресурса, выделяемая i-му агенту; $b_i(t)$ - доля взятки ("отката"), предлагаемая i-м агентом супервайзеру; $z(t)$ - вероятность поимки взяточника как заданная функция затрат на борьбу с коррупцией; M - штраф взяточника при поимке; s_i - доля полученного ресурса, идущая на личное потребление агента; a_i - коэффициент производительности агента.

Чтобы получить аналитическое решение игры (1) -(5), явно зададим механизм распределения ресурса пропорционально долям отката:

$$r_i(t) = b_i(t) R. \qquad (6)$$

Будем исходить из того, что величина отката на практике принадлежит отрезку [0.1,0.3] и ресурс делится не более, чем между тремя предлагающими взятку агентами. Механизм (6) фактически исключает супервайзера из анализа и приводит к дифференциальной игре агентов в нормальной форме

$$J_i = Rs_i \int_0^T e^{-\rho t}[1 - b_i(t)]b_i(t)dt + g_i(x(T)) \to \max \tag{7}$$

в силу ограничения (4) и уравнения динамики

$$\dot{x} = \sqrt{R}\sum_{i\in N} a_i\sqrt{(1-s_i)(1-b_i(t))b_i(t)}, \quad x(0) = x_0\,. \tag{8}$$

Функция Гамильтона для i-го агента имеет вид

$H_i(x, b_i, \lambda_i) = Rs_i b_i(1-b_i) + \lambda_i\sqrt{R}\sum_{i\in N} a_i\sqrt{(1-s_i)(1-b_i)b_i}$. Имеем

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial b_i} = (1-2b_i)[2Rs_i\sqrt{(1-b_i)b}_i + a_i\lambda_i\sqrt{R(1-s_i)}].$$

По смыслу задачи "теневая цена" λ_i положительна, поэтому выражение в квадратных скобках тоже положительно и равновесное по Нэшу решение

$b_i^{NE} = 1/2, i \in N$.

Таким образом, это решение можно реализовать на практике, если ресурс делится не более чем между двумя агентами, что вполне реально. Положим для простоты $g_i(x) = x$. Максимизированная функция Гамильтона

$H_i^*(x, \lambda_i) = \frac{1}{4}Rs_i + \frac{1}{2}\lambda_i\sqrt{R}\sum_{i\in N} a_i\sqrt{(1-s_i)}$ не зависит от x, поэтому краевая задача для сопряженной переменной имеет вид

$\dot{\lambda}_i = \rho\lambda_i(t), \lambda_i(T) = 1$,

откуда $\lambda_i^{NE}(t) = e^{-\rho(T-t)}, i \in N;$

$$x^{NE}(t) = \left(\frac{\sqrt{nR}}{2\sqrt{2}}\sum_{i\in N} a_i\sqrt{1-s_i}\right)t + x_0\,;\; J_i^{NE} = \frac{nRs_i(1-e^{-\rho T})}{8\rho} + \frac{T\sqrt{nR}}{2\sqrt{2}}\sum_{i\in N} a_i\sqrt{1-s_i} + x_0\,.$$

Дифференциально-игровая модель в форме характеристической функции

Для построения на основе игры в нормальной форме (4), (7)-(8) игры в форме характеристической функции сначала найдем выигрыш максимальной коалиции N как решение задачи оптимального управления

$$J^N = R\int_0^T e^{-\rho t}\sum_{i\in N} s_i b_i[1-b_i(t)]dt + nx(T)$$

при ограничениях (4), (8). Оказывается, что здесь также

$b_i^N(t) = 1/2, i \in N; \quad x^N(t) = x^{NE}(t)$.

Далее, для произвольной коалиции $K \subset N$ вновь получаем $b_i(t) = 1/2, i \in K$, однако при $i \in N \setminus K$ здесь $b_i = 0$, откуда

$$\dot{x} = \sqrt{R}\sum_{i\in K} a_i\sqrt{(1-s_i)(1-b_i(t))b_i(t)}, \quad x(0) = x_0,$$

поэтому

$$x^K(t) = \left(\frac{\sqrt{nR}}{2\sqrt{2}}\sum_{i\in K} a_i\sqrt{1-s_i}\right)t + x_0 < x^N(t),$$

$$J^K = \frac{nRs_i(1-e^{-\rho T})}{8\rho} + \frac{T\sqrt{nR}}{2\sqrt{2}}\sum_{i\in K} a_i\sqrt{1-s_i} < J^N.$$

Характеристическая функция задается формулами

$v(\{i\}) = J_i^{NE}, v(K) = J^K, v(N) = J^N$.

Компоненты вектора Шепли вычисляются как

$\Phi_i^v = \dfrac{nRs_i(1-e^{-\rho T})}{8\rho} + \dfrac{Ta_i\sqrt{nR(1-s_i)}}{2\sqrt{2}}, i \in N$ и не зависят от x, t.

Формально, процедура распределения дележа имеет вид

$$B_i(t) = \rho\Phi_i^v = \frac{nRs_i(1-e^{-\rho T})}{8} + \frac{\rho Ta_i\sqrt{nR(1-s_i)}}{2\sqrt{2}}, i \in N, t \in [0,T].$$

Заключение

Наиболее естественные пути развития рассмотренной упрощенной модели заключаются в следующем:

- использовать другие механизмы распределения ресурсов, например, механизм пропорционального распределения $r_i(t) = b_i(t)R / \sum_{j \in N} b_j(t), i \in N$;

- проанализировать игру (1)-(5) в иерархической постановке, не заменяя выбор стратегий супервайзером заданным механизмом распределения; добавить анализ зависимости решения от M и $z(t)$;

- учесть зависимость выигрыша агентов от производимого блага.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00053.

Литература

1. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations. Nova Science Publishers, 2016. 552 p.

2. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. Philadelphia, 1999. 519 p.

3. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000. 382 p.

4. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. Game Theory. World Scientific Publishers, 1996. 564 p.

5. Kronbak L.G., Lindroos M. Marine Resource Economics, 2007, 22, pp.137-154.

6. Yeung D.W.K. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, 134, pp.143-160.

7. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 145 (3), pp.579-596.

8. Zaccour G. Time consistency in cooperative differential games: a tutorial. – INFOR 2008, 46, pp.81-92.

9. Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А., Дьяченко В.К. Динамическая модель профессиональной специализации студентов. Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1555.

10. Дьяченко В.К., Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А. Кооперативно-игровое моделирование социального партнерства в системе дополнительного профессионального образования: постановка задачи. Инженерный вестник Дона. 2016. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3587.

References

1. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations. Nova Science Publishers, 2016. 552 p.

2. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. Philadelphia, 1999. 519 p.

3. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000. 382 p.

4. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. Game Theory. World Scientific Publishers, 1996. 564 p.

5. Kronbak L.G., Lindroos M. Marine Resource Economics, 2007, 22, pp. 137-154.

6. Yeung D.W.K. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, 134, pp.143-160.

7. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 145 (3), pp.579-596.

8. Zaccour G. Time consistency in cooperative differential games: a tutorial. INFOR 2008, 46, pp. 81-92.

9. Tarasenko L.V., Ugol'nitskii G.A., Dyachenko V.K. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1555.

10. Dyachenko V.K., Tarasenko L.V., Ugol'nitskii G.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2016. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3587.