

Модель и программный комплекс для исследования асимптотик компонент вектора скорости вращающейся стратифицированной жидкости

Е.Н. Свиридова, Д.Ю. Невров

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Аннотация: Разработан программный комплекс, реализующий расчет и графическую визуализацию асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ главных членов асимптотик компонент вектора скорости частиц при двумерном движении вращающейся стратифицированной жидкости. Изложена математическая модель, положенная в основу программного комплекса. Описана структура программного комплекса. Показано применение программного комплекса при исследовании динамики колебаний в стратифицированной жидкости.

Ключевые слова: стратифицированная вращающаяся жидкость, математическая модель, программный комплекс, асимптотическое поведение, главные члены асимптотик.

Введение

Задачи, описывающие динамику внутренних и поверхностных волн в стратифицированных жидкостях, заслуживают большого внимания, а исследования в данной сфере имеют высокую теоретическую и практическую значимость, так как дают возможность прогнозировать и понимать природу широкого спектра явлений, имеющих отношение к проблемам океана, физики атмосферы и геофизики [1–5].

Данная статья посвящена рассмотрению одной из задач о малых внутренних движениях невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости, для которой удалось построить точные асимптотики компонент решения при $t \rightarrow +\infty$. Явные представления для главных членов асимптотик этих компонент имеют довольно громоздкий вид, поэтому для исследования зависимости составляющих V_1 , V_2 , V_3 вектора скорости частиц от времени t при изменяющихся значениях динамических характеристик стратифицированной жидкости, входящих в математическую постановку

рассматриваемой задачи, разработан программный комплекс, реализующий расчет и графическую реализацию указанных зависимостей.

Математическая модель

Рассмотрим распространение малых колебаний в невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси. Пусть имеется декартова система координат (x_1, x_2, x_3) , которая вращается одновременно с жидкостью, причем ось Ox_3 этой системы совпадает по направлению с осью вращения. Относительно описанной системы координат невозмущенная жидкость будет находиться в состоянии покоя.

Рассматривается стратификация жидкости, вызванная силой тяжести. При такой стратификации плотность жидкости в направлении поля тяготения становится неоднородной [6]. Будем считать, что функция плотности жидкости $\rho_0(x_3)$ распределена по экспоненциальному закону: $\rho_0(x_3) = A \exp(-2\beta x_3)$, где A, β – положительные константы. Следствием экспоненциальной стратификации является постоянство важнейшей характеристики динамических свойств стратифицированной жидкости – частоты Вейсяля-Брента [6]: $\omega_0^2 = 2\beta g$.

Рассматриваются плоские (двумерные) движения [7–10] стратифицированной жидкости, находящейся в состоянии вращения, которые задаются функциями, не зависящими от одной из пространственных переменных x_1 или x_2 . Не ограничивая общности будем считать, что функции не зависят от переменной x_2 .

Данная модель описывается нижеследующими соотношениями [9,10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0; \\ \frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta \sigma \right) = 0; \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где (V_1, V_2, V_3) – вектор скорости частиц жидкости; $(0, 0, \alpha)$ – вектор Кориолиса (α – удвоенная частота вращения); $\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1} p e^{2\beta x_3}$; p – динамическое давление; ω_0^2 – квадрат частоты Вейсяля-Брента; g – ускорение свободного падения.

Для решения системы (1) вводятся начальные и граничные условия:

$$V_k(x, 0) = 0, k = 1, 2, 3, \frac{\partial V_3}{\partial t}(x, 0) = 0, \sigma(x, 0) = 0, V_3(x_1, x_3, t)|_{x_3=0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, t). \quad (2)$$

Отметим, что граничное условие является следствием существования функции тока $\Psi = \Psi(x_1, x_3, t)$, которая определяет двумерное течение жидкости (см., например, [7]) и для прямоугольной декартовой системы координат определяется из соотношения: $\{V_1, V_3\} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right\}$.

В работах [9,10] сформулированы ограничения на функцию $\psi(x_1, t)$, доказано существование решения задачи (1)–(2) в функциональных пространствах С.Л. Соболева и выписано два члена асимптотических разложений для каждой из составляющих V_1, V_2, V_3 вектора скорости частиц жидкости при $t \rightarrow +\infty$.

Описание программного комплекса и результаты моделирования

В основу программного комплекса легли явные выражения для главных членов асимптотического разложения при $t \rightarrow +\infty$ компонент вектора скорости частиц жидкости, полученные в работах [9,10]. По результатам этих работ может быть сформулирована следующая теорема, содержащая основные расчетные формулы.

Теорема. Главные члены асимптотик при $t \rightarrow +\infty$ компонент вектора скорости решения задачи (1)–(2) с точностью до постоянного множителя определяются по следующим формулам:

$$V_1^{main}(x_3, t) = \frac{\alpha^{0.5} \exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5} (\omega_0^2 - \alpha^2)^{0.5}} \left(\frac{2^{0.5}}{x_3} - \frac{\beta}{2^{0.5}} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + t\alpha \right) t^{-3/2}; \quad (3)$$

$$V_2^{main}(x, t) = \alpha\beta \exp(\beta x_3) F_{s_1 \rightarrow x_1}^{-1} \left[\hat{\psi}(s_1, 0) \exp \left(-x_3 \sqrt{s_1^2 + \beta^2} \right) \right] - \\ - \alpha \exp(\beta x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} F_{s_1 \rightarrow x_1}^{-1} \left[\hat{\psi}(s_1, 0) \exp \left(-x_3 \sqrt{s_1^2 + \beta^2} \right) \right] + \\ + \frac{\alpha^{0.5} 2^{0.5} \exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5} (\omega_0^2 - \alpha^2)^{0.5}} \left(\beta - \frac{1}{x_3} \right) \sin \left(t\alpha - \frac{\pi}{4} \right) t^{-3/2}; \quad (4)$$

$$V_3^{main}(x_3, t) = \frac{3\beta^2 \exp(\beta x_3) \alpha^{1.5} \sin \left(\frac{\pi}{4} - t\alpha \right)}{\sqrt{2} \pi^{1.5} x_3^2 (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1.5}} t^{-5/2}, \quad (5)$$

где $\hat{\psi}(s_1, 0) = F_{x_1 \rightarrow s_1} [\psi(x_1, 0)]$ – частичное преобразование Фурье по переменной x_1 ; $F_{s_1 \rightarrow x_1}^{-1}$ – обратное частичное преобразование Фурье.

Программный комплекс состоит из четырех модулей: MAIN.cpp, UnitV1.cpp, UnitV2.cpp, UnitV3.cpp.

В главном модуле MAIN реализованы: 1) ввод начальных данных (значения физических параметров: параметр стратификации жидкости, угловая частота вращения жидкости, частота Вейсяля-Брента) и выбор

компоненты моделирования; 2) запуск процесса построения графиков главных членов асимптотик компонент вектора скорости; 3) запуск процесса сохранения результатов моделирования в файл.

В модулях UnitV1, UnitV2, UnitV3 реализованы: 1) расчеты асимптотик при $t \rightarrow +\infty$ компонент вектора скорости частиц жидкости по формулам (3)–(5); 2) процессы построения графиков асимптотик компонент вектора скорости частиц жидкости; 3) вывод результатов моделирования на экран в отдельных окнах.

Все модули запускаются из файла проекта, содержащего базовую конфигурацию программного комплекса. На рисунке 1 приведена схема взаимодействия модулей.

На рисунке 2 представлено главное окно программного комплекса, где пользователь осуществляет ввод необходимых физических параметров и выбирает нужную для моделирования компоненту. Если какое-то из полей главного окна программы останется не заполненным, пользователь получит соответствующее уведомление.

Результат работы программы представлен на рисунке 3. Строится зависимость главного члена асимптотики выбранной компоненты вектора скорости от времени при введенных значениях физических параметров по нажатию кнопки «Построение графика» в главном окне программы.

Отметим, что построенный график допускает возможность детализации – пользователь может увеличить необходимые участки графика, используя левую клавишу мыши. Результат увеличения нужного участка показан на рисунке 4.

По нажатию кнопки «Запись результатов в файл» в главном окне программы происходит сохранение построенного графика зависимости в отдельный файл *.bmp, причем имя файла содержит значения введенных параметров α и β , например: “alpha_0005_beta_0013.bmp”.

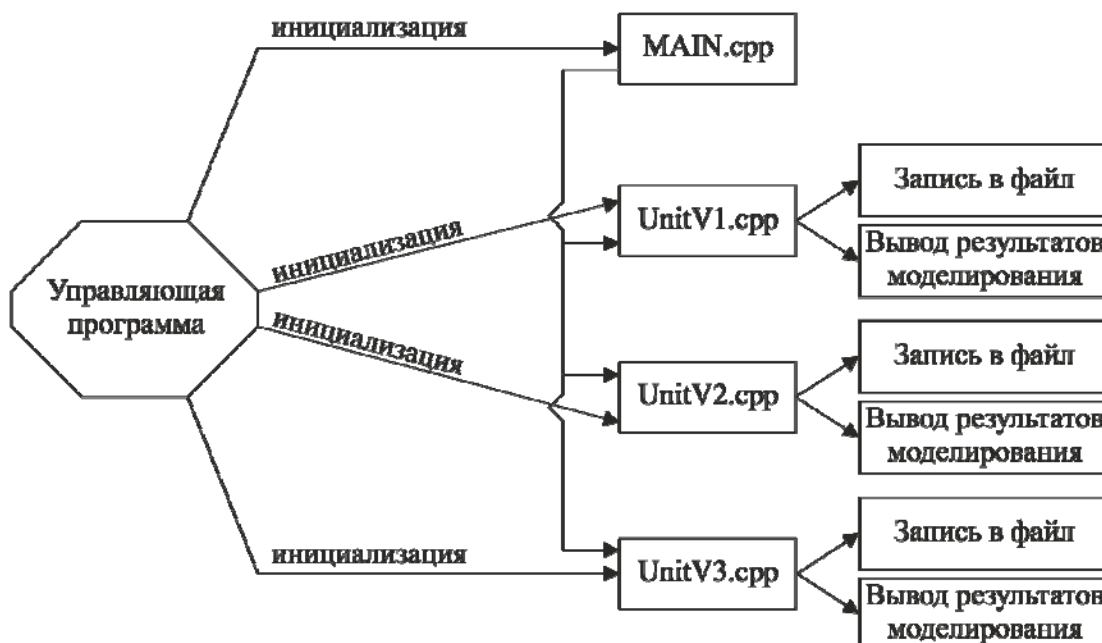


Рис. 1. – Схема взаимодействия модулей

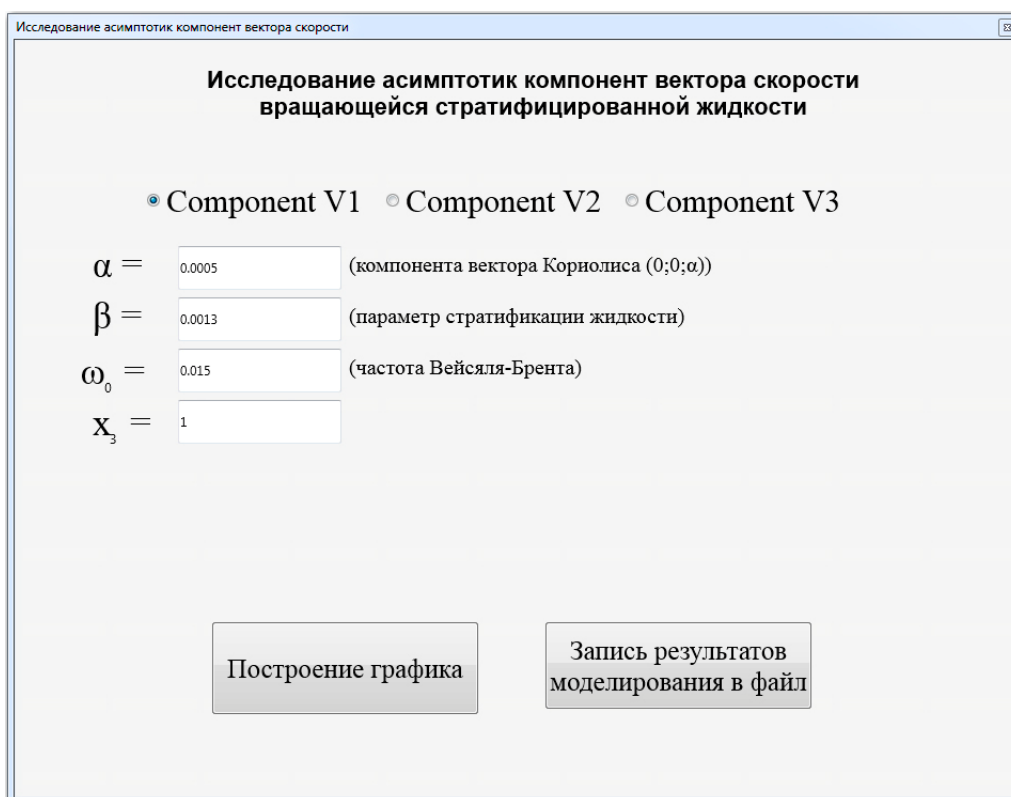


Рис. 2. – Главное окно программного комплекса

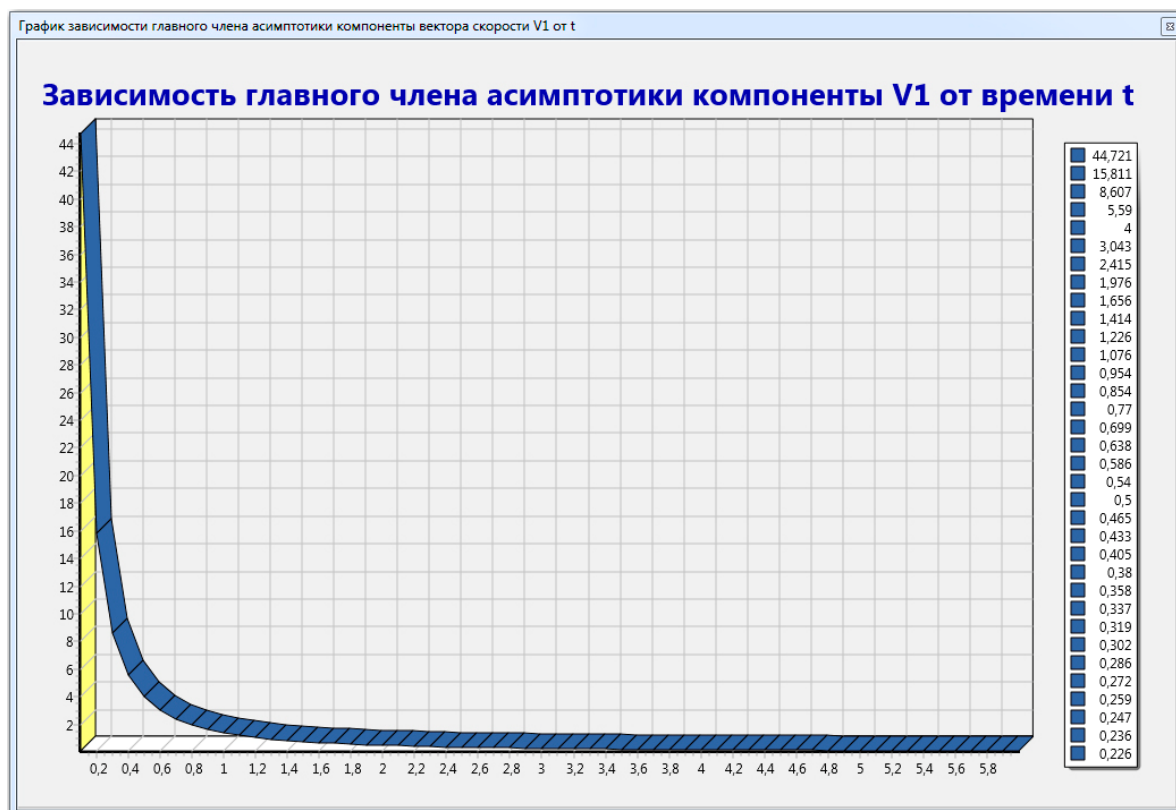


Рис. 3. – Результат работы программного комплекса

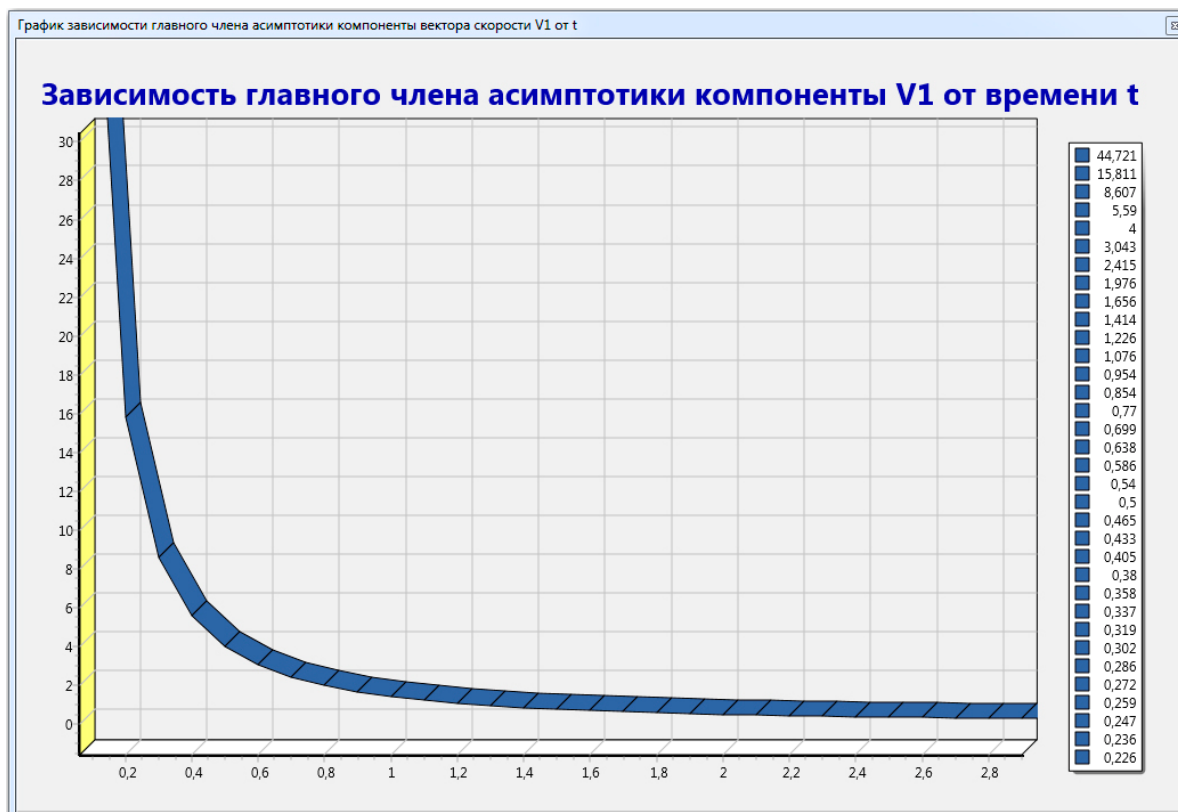


Рис. 4 – Детализация нужного участка графика зависимости

Заключение

Разработан программный комплекс, реализующий расчет и графическую визуализацию асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ главных членов асимптотик компонент вектора скорости частиц при малых внутренних движениях невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости. Программный комплекс позволяет легко и быстро проводить анализ поведения колебаний в жидкости с течением времени при различных значениях физических параметров, входящих в рассмотренную математическую модель.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Ленанд, 2014. 320 с.
2. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. К. Хекмат. Двумерная математическая модель жидкости водоема с учетом наличия на поверхности ледяной пластины // Инженерный вестник Дона, 2011, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/583.
4. К. Хекмат. Управление амплитудой волн, вызванных донными смещениями // Инженерный вестник Дона, 2011, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/333.
5. Holm D.D. Gyroscopic Analog for Collective Motion of a Stratified fluid // J. Math. Anal. and Appl. 1986. 117 (1). pp. 57–80.
6. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.
7. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 344 с.
8. Перова Л.В., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской,

бегущей по дну волной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. № 1. С.136–143.

9. Свиридова Е.Н. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 1 // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2009. №1. С. 150–158.

10. Свиридова Е.Н. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 2 // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2009. №2. С. 101–111.

References

1. Il'jushin A.A. *Mehanika sploshnoj sredy [Mechanics of a solid media]*. М.: Lenand, 2014. 320 p.

2. Pedlosky J. *Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.

3. Kandalf Hekmat. *Inženernyj vestnik Dona (Rus)*, 2011, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/583.

4. Kandalf Hekmat. *Inženernyj vestnik Dona (Rus)*, 2011, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2011/333.

5. Holm D.D. *J. Math. Anal. and Appl.* 1986. 117 (1). pp. 57–80.

6. Brehovskih L.M., Goncharov V.V. *Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred [Introduction to Solid-media mechanics]*. М.: Nauka, 1982. 336 p.

7. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Linejnye zadachi teorii nestacionarnyh vnutrennih voln [Linear Problems of Theory of Transient Internal Waves]*. М.: Nauka. Main Editorial Board of Physical and Mathematical Literature. 1990. 344 p.

8. Perova L.V., Pletner Ju.D., Sveshnikov A.G. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 2000. № 1. pp.136–143.



9. Sviridova E.N. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2009. №1. pp. 150–158.

10. Sviridova E.N. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2009. №2. pp. 101–111.