

Оптимальное планирование траектории мобильного робота при его движении по холмистой местности

А.И. Матвеев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Разработан алгоритм планирования оптимальной траектории мобильных объектов, с помощью которого минимизируются затраты энергии при передвижении по холмистой местности. Для определения оптимальной траектории находится минимум функционала работы сил трения качения. Поиск оптимальной траектории, на которой работа сил трения минимальна, осуществляется методом динамического программирования. Предложенный алгоритм планирования оптимальной траектории можно использовать для уменьшения расхода энергии в процессе передвижения по холмистой местности не только автономных робототехнических систем, но и других транспортных средств.

Ключевые слова: алгоритмы планирования, работа силы трения качения, динамическое программирование, оптимизация по выбранному критерию.

Введение

Планирование маршрута является наиболее важной частью автономной навигации для мобильного робота. Мобильное робототехническое устройство должно планировать свой маршрут в таких задачах, как перемещение из одной точки пространства с препятствиями в другую, навигация на местности, обследование местности или картографирование. Наиболее полным руководством по всевозможным алгоритмам планирования является монография [1]. В [2, 3] даны краткие обзоры по современным методам планирования движения. В [4] рассматривается планирование траектории мобильного робота на основе нечеткой логики, в [5] описано планирование траектории с использованием сплайн метода.

Более сложными задачами планирования траектории мобильного робота являются задачи, в которых любая траектория имеет некоторый функционал стоимости [6]. Например, нужно выбрать из всевозможных траекторий между начальной и конечной точками наиболее оптимальную по времени [7], длине пути [8] или по энергозатратам. Последняя задача оптимизации траектории мобильного робота решается далее.

Метод оптимизации при планировании траектории подвижного объекта, разработанный в статье, можно использовать также при выборе пути для автомобильного транспорта в сложных геологических условиях. Задачи оптимального планирования траектории мобильных роботов на пересеченной местности имеют практическую ценность и являются актуальными. Их решение позволяет снизить энергозатраты при перемещении из начальной точки в конечную точку пути.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу планирования траектории мобильного робота в следующей постановке: необходимо среди множества доступных путей выбрать оптимальную траекторию движения робота по холмистой местности из одного пункта в другой пункт. В качестве критерия оптимальности для рассматриваемого движения выбран минимальный расход топлива. Рельеф местности будем описывать двумерной картой высот (зависимость высоты от координат), которую можно задать аналитически либо в виде массива.

Функционал стоимости задачи планирования траектории мобильного робота

Пусть зависимость высоты от координат имеет вид $z = z(x, y)$. Виртуальный рельеф местности удобно аппроксимировать суммой:

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^N z_i \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2}{a_i^2} - \frac{(y-y_i)^2}{b_i^2}\right), \quad (1)$$

где z_i – высота i -той возвышенности, x_i , y_i – координаты максимума i -той возвышенности, a_i , b_i – размах i -той возвышенности по осям x , y . Высота каждого холма, его размер по осям x , y выбираются хаотично, используя для создания виртуального рельефа местности функцию `np.random.rand()` на языке python.

В процессе движения по склону холма на колесный мобильный робот действует сила трения качения, пропорциональная нормальной реакции опоры [9]

$$F_{tr} = \mu \frac{N}{R} + \mu_0 \left(1 + q \frac{V^2}{R^2} \right) \frac{N}{R}, \quad (2)$$

где N – реакция опоры, R – радиус колеса мобильного робота, V – его скорость, μ , μ_0 – коэффициенты трения, $q = \text{const}$. Первое слагаемое в (2) – это собственно трение качения, второе – это трение качения Кулона [9]. Второе слагаемое проявляется при достаточно больших скоростях, ограничивая при скатывании вниз максимальную скорость мобильного робота. Если робот находится на склоне поверхности, то нормальная реакция, которая определяет силу трения качения, уменьшается и будет равна $mg \cos \theta$, где θ – угол между нормалью касательной плоскости к поверхности и вертикальной осью (рис. 1).

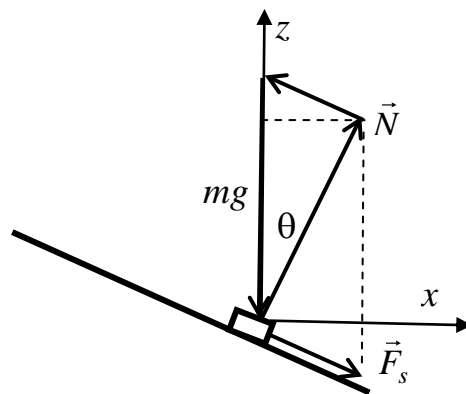


Рис. 1. – Силы, действующие на колесо робота на склоне холма

Вследствие уменьшения нормальной реакции работа по преодолению силы трения качения также уменьшается:

$$A_{tr} = \frac{mg}{R} \int_1^2 \left(\mu + \mu_0 \left(1 + q \frac{V^2}{R^2} \right) \right) \cos \theta ds. \quad (3)$$

Необходимо найти такую траекторию, на которой эта работа достигает минимального значения.

К работе сил трения нужно добавить работу потенциальных сил и учесть работу силы скатывания. Она направлена (рис. 1) вдоль градиента поверхности и равна $F_s = mg\sin(\theta)$. Откуда работа, совершаемая при подъеме вверх и спуске вниз, равна:

$$A = \begin{cases} U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) + A_{tr}, \theta \geq 0; \\ \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} (F_{tr} - mg\sin(\theta)\cos(\alpha)) ds, \theta < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где α – угол между вектором скорости и вектором силы скатывания. Случай $\theta > 0$ соответствует подъему робота вверх, $\theta < 0$ – его движению вниз. Сила скатывания вносит наибольший вклад, если она направлена вдоль вектора скорости $\alpha \approx 0$. В этом случае, если $mg\sin(\theta) > F_{tr}$, то работа отрицательна, и мобильный робот движется вниз с ускорением. Поэтому в случае:

$$\theta > \theta_{\max} = \arcsin(F_{tr}/mg) \quad (5)$$

работа, затрачиваемая на перемещение робота вниз равна нулю. Уравнение движения мобильного робота имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = mg\sin(\theta)\cos(\alpha) - \mu \frac{N}{R} - \mu_0 \left(1 + q \frac{V^2}{R^2} \right) \frac{N}{R}.$$

Скорость при движении вниз сначала растет, но после достижения некоторого максимального значения эта скорость становится постоянной и равной:

$$V = \frac{R}{\sqrt{q}} \left(\frac{R}{\mu_0} \operatorname{tg}(\theta)\cos(\alpha) - \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим сначала выбор оптимального пути мобильного робота, когда его траектория пересекает одиночный холм. Карту высот для этого случая получим, оставив в (1) первое слагаемое, и полагая в нем $z_1 = 1$, $a_1 = b_1 = \sqrt{2}$. Общий расход энергии необходимой для преодоления холма равен сумме энергии, затрачиваемой на подъем (4), и расходу энергии при спуске вниз:

$$A = A_{tr} + U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) + \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} (F_{tr} - mg(F_{tr} - mgsin(\theta)cos(\alpha))) ds. \quad (6)$$

Сравним эту суммарную работу с работой сил трения качения по пути в объезд холма. Затраты энергии по объездному пути могут быть большими из-за большей длины пути. Далее будем считать, что затраты энергии по более прямому пути с пересечением встречного холма будут меньше, чем по объездному пути:

$$A_{tr} + U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) + \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} (F_{tr} - mg(F_{tr} - mgsin(\theta)cos(\alpha))) ds < A_L, \quad (7)$$

где A_L - работа сил трения качения по объездному пути. В этом случае с целью уменьшения энергозатрат путь можно прокладывать, пересекая встречные холмы.

Так как потенциальная энергия не зависит от пути, то для минимизации энергии (6), затрачиваемой на передвижение, нужно минимизировать работу сил трения (3). Для минимизации функционала (6) воспользуемся методом динамического программирования. Перед применением этого метода перейдем в (6) от непрерывных переменных к дискретным, удобным для численных вычислений. Вычислим сначала в формуле (6) угол θ . Уравнение нормали имеет вид [10]:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad (8)$$

где $z'_x(x_0, y_0) = \partial z / \partial x|_{x=x_0, y=y_0}$, $z'_y(x_0, y_0) = \partial z / \partial y|_{x=x_0, y=y_0}$. Вектор с компонентами $z'_x(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$, 1 в точке поверхности с координатами x_0, y_0 направлен вдоль нормали. С учетом (8) единичный вектор нормали к поверхности в произвольной ее точке равен:

$$\vec{n} = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}}.$$

Откуда следует:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial x)^2 + 1}}, \quad \sin \alpha = \frac{\partial z / \partial x}{\sqrt{(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial x)^2 + 1}}. \quad (9)$$

Сопоставим координатам местности координатную сетку $x \rightarrow i$, $y \rightarrow j$. Вводя обозначения $\Delta z_i = z_{i+1, j} - z_{i, j}$, $\Delta z_j = z_{i, j+1} - z_{i, j}$, (9) запишем в дискретной форме:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta z_j^2 + 1}}. \quad (10)$$

Из графика (рис. 2) для функции (10) видно, что она минимальна в точках на окружности, где модуль градиента функции, в виде первого слагаемого (1), максимален. Так как работа силы трения качения (3) получается суммированием функции (10), то эта работа при огибании одиночного холма (рис. 2) минимальна вдоль траектории, где функция (10) также минимальна.

Используя обозначения $\Delta z_i = z_{i+1, j} - z_{i, j}$, $\Delta z_j = z_{i, j+1} - z_{i, j}$, функционал (3) запишем в виде:

$$A_{tr} = \frac{mg}{R} \sum_{L(i, j)} \left(\mu(i, j) + \mu_0(i, j) \left(1 + \frac{V_{i, j}^2}{R^2} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta z_j^2 + 1}}, \quad (11)$$

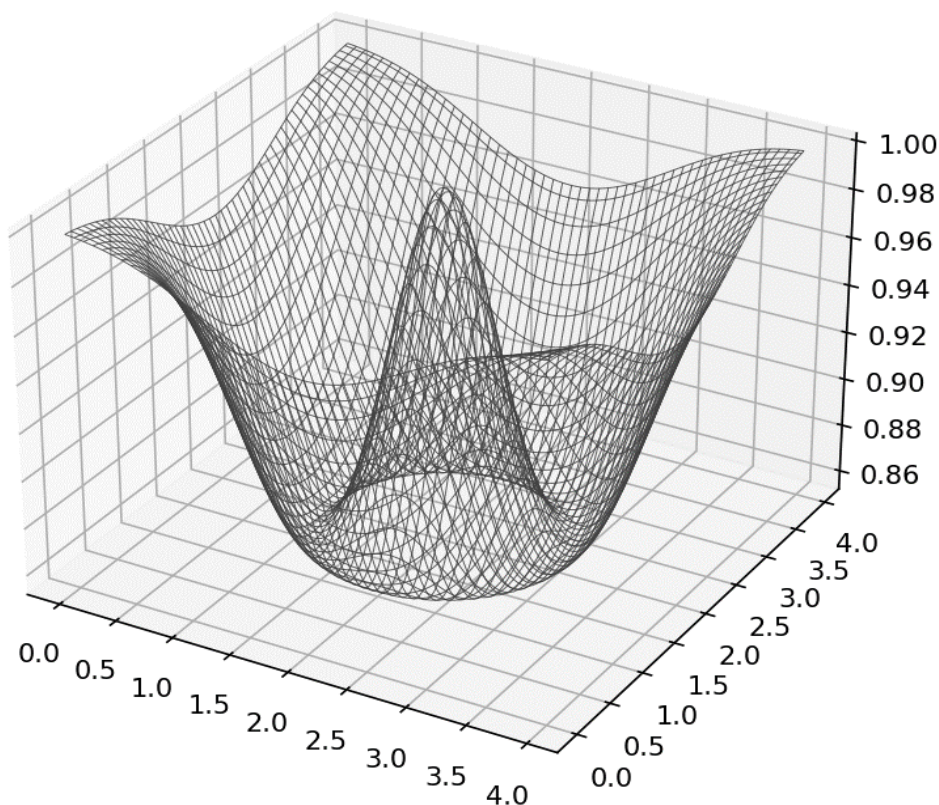


Рис. 2. – График функции $\cos\theta$

где $L(i, j)$ - траектория по координатной сетке. Для нахождения оптимальной траектории между начальной и конечной точкой используется метода динамического программирования. Для этого холмистая местность с помощью прямоугольной сетки разбивается на клетки. Каждому ребру $(i-1, j) \rightarrow (i, j)$ клетки сопоставляется вес, равный элементарной работе сил трения при перемещении вдоль ребра. Методом динамического программирования находится траектория, на которой суммарный вес после прохождения ребер сетки из начальной в конечную точку, вычисленный с помощью формулы (11), минимален. Программа для нахождения минимальной суммы (11) написана на языке Python. На рис. 3 изображен результат численного расчета оптимальной траектории мобильного робота, в случае, когда эта траектория пересекает одиночный холм.

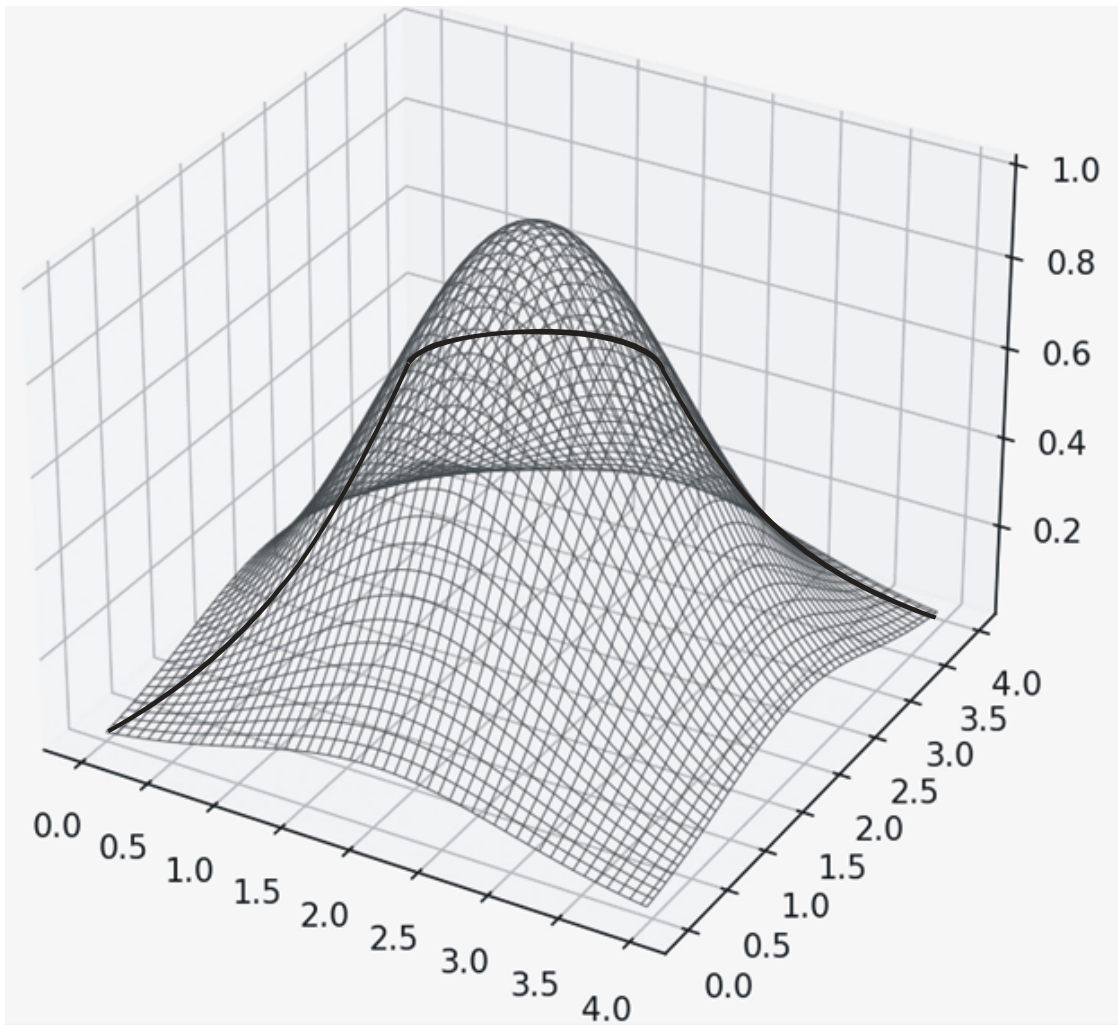


Рис. 3. – Оптимальная траектория мобильного робота при пересечении одиночного холма

В случае, когда на пути мобильного робота встречаются несколько холмов, график оптимальной траектории приводится на рис. 4. Рельеф местности на этом графике изображается в виде кривых линий равной высоты. Цифрой 1 обозначена оптимальная траектория, 2 – траектория в обход холмов. Оптимальность траектории достигается не только за счет того, что ее длина короче, но и вследствие минимизации работы сил трения качения.

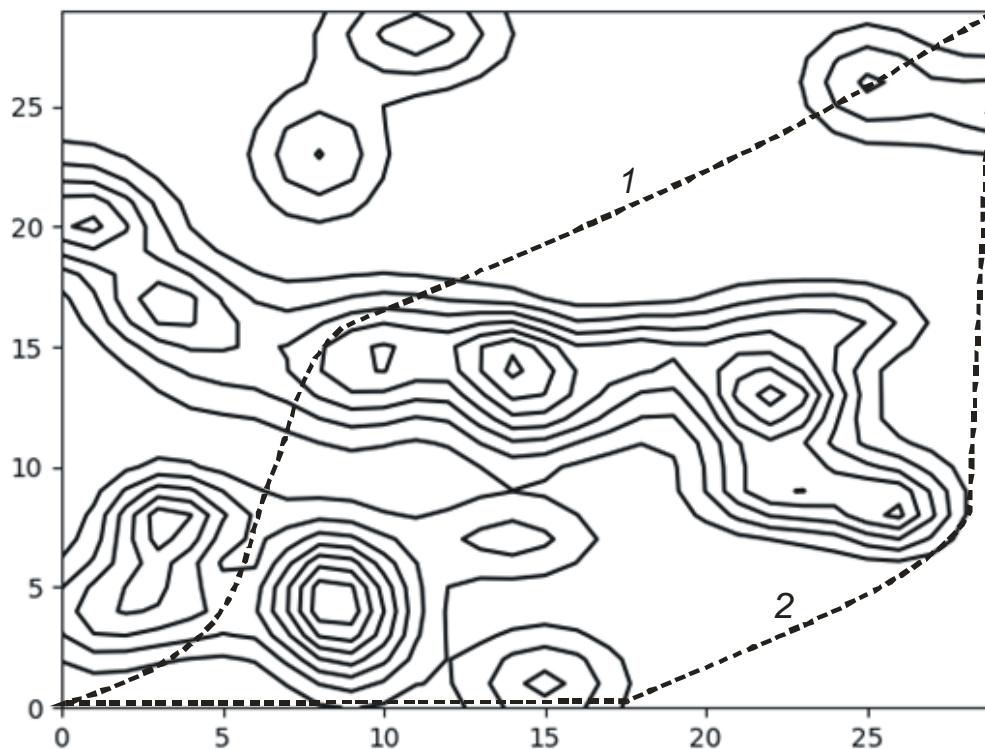


Рис. 4. – Оптимальная траектория мобильного робота при пересечении холмистой местности

Заключение

Разработан алгоритм планирования траектории, с помощью которого минимизируются энергозатраты в процессе движения мобильного робота или другого подвижного объекта. Минимизация работы сил трения качения осуществляется на основе метода динамического программирования. Для этого холмистая местность разбивается на клетки с помощью прямоугольной сетки, каждому ребру клетки сопоставляется вес, равный элементарной работе сил трения при перемещении вдоль ребра. Методом динамического программирования находится траектория, на которой суммарный вес при прохождении ребер сетки из начальной в конечную точку минимален. Предложенный метод может найти широкое применение при планировании оптимальной траектории для мобильных робототехнических систем, при выборе пути автомобильным транспортом в случае сложных геологических условиях.

Литература

1. LaValle S. M. Planning Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 512 p.
 2. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и математическое моделирование. 2018. №1. С. 15-58.
 3. Казаков К.А., Семенов В.А. Обзор современных методов планирования движения. Труды ИСП РАН, 2016. С. 241-294.
 4. Белоглазов Д.А., Косенко Е.Ю., Соловьев В.В., Титов А.Е., Шаповалов И.О. Разработка метода планирования траектории перемещения мобильного автономного робота в трехмерной среде на основе аппарата нечеткой логики // Инженерный вестник Дона, 2015, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3387
 5. Magid E., Keren D., Rivlin E., Yavneh I. Spline-based robot navigation // 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE. 2006. pp. 2296-2301.
 6. Боженюк А.В., Герасименко Е.М. Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона, 2013, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583
 7. Нечитайло Н.М., Панасов В.Л., Линденбаум Т.М. Оптимизация назначения средств доставки в транспортных задачах по критерию времени // Инженерный вестник Дона, 2021, №2. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2021/6840
 8. Изотова Т.Ю. Обзор алгоритмов поиска кратчайшего пути в графе // Новые информационные технологии в автоматизированных системах: материалы девятнадцатого научно-практического семинара. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. №19. С. 341-344.
 9. Иванов А. П. О трении // ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК. 2019. Т. 485. № 3. С. 295–299 .
-

10. Игнатъев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Учебное пособие. Казань: Казанский университет, 2013. 204 с.

References

1. LaValle S. M. Planning Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 512 p.
2. Lu V. Matematika i matematičeskoe modelirovanie. 2018. №1. pp. 15-58.
3. Kasakov K.A., Semenov V.A. Obsor sovremennyh metodov planirovanija dvizheniaj. Trudy ISP RAN. 2016. pp. 241-294.
4. Beloglasov D.A., Kosenko E.Yu, Solov`ev V.V., Titov A.E., Shapovalov I.O. Inzhenernyj vestnik Dona, 2015, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3387
5. Magid E., Keren D., Rivlin E., Yavneh I. 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2006. Pp. 2296-2301.
6. Bogenyuk A.V., Gerasimenko E.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №1. URL ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583
7. Neshitailo N.M., Panasov V.L., Lindenbaum T.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2021/6840
8. Izotova T., Uj. Nowye informacionnye tehnologii v avtomatizirovannyh sistemah. M.: IPM im. M.V. Keldysha. 2016. №19. Pp. 341-344.
9. Ivanov A.P. Doklady akademii nauk. 2019. T. 485. № 3. Pp. 295–299.
10. Ignatiev Y.G. Differencialnaja geometrija dlaj krivyh i poverhnostej v evklidovom prostranstve [Differential geometry of curves and surfaces in Euclidean space]. Kazan: Kazanskij universitet, 2013. 204 p.