Инженерный вестник Дона, №6 (2019)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2019/6046

Пространственные 3-ткани

Ю.М. Бельченко, Н.М. Шумун

Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: Предложен способ задания поверхности определенной дискретным каркасом при помощи плоской 3-ткани. Задано однопараметрическое не параметризованное семейство кривых, т.е. дискретный каркас линий. Возможны два случая задания линий дискретного каркаса поверхности: точечными рядами или уравнениями. В статье рассматриваются вопросы задания пространственной 3-ткани на основе плоской. При этом используют основные понятия правильного тетраэдра и полного четырех-сторонника. Если ткань ***M*** имеет два семейства диагональных поверхностей τ_1 и τ_2, то она имеет также и третье подобное семейство τ_3.
Ключевые слова: начертательная геометрия, графика, октаэдрическая 3-ткань, пространственные 3-ткани, полный четырех-сторонник, топология, аффинная геометрия, правильная 3-ткань, проективная геометрия, инволюция.

Естественным расширением плоских 3-тканей являются 3-ткани в пространстве. Такие ткани могут быть образованы двумя способами, что приводит к различным результатам, т.е. к двум видам пространственных 3-тканей.

Рассмотрим понятие октаэдрической ткани, применение которой имеет практическую значимость.

Если из четырех уравнений семейств кривых исключить *x, y, z*, то получим следующее условие

$$W=(u_0,u_1,u_2,u_3), \qquad (1)$$

которому удовлетворяют четыре поверхности ткани, проходящие через одну точку. Полученное таким образом уравнение (1) мы можем назвать уравнением ткани. Ткань, образованную такими поверхностями, будем называть октаэдрической, если ее уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$u_0+u_1+u_2+u_3=0.$$

Подобные ткани называются пространственными аналогами шестиугольных тканей на плоскости. Простейшим примером октаэдрической ткани является ткань, образованная четырьмя различными семействами параллельных плоскостей, которые можно считать, в свою очередь, параллельными четырем граням правильного тетраэдра, пример приведен на рис. 1.

Здесь октаэдр получен путем соединения середин ребер тетраэдра *ABCD* прямыми. В этом случае можно говорить о правильной ткани. Таким образом, октаэдрические ткани топологически эквивалентны правильным.

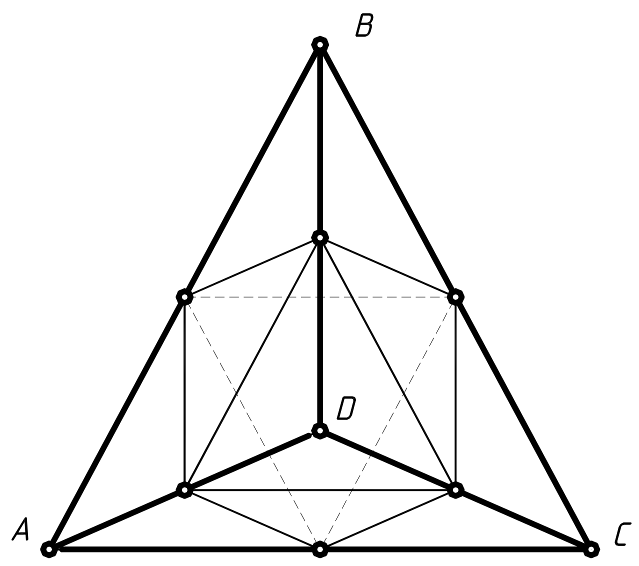

Рис. 1. – Октаэдр *ABCD*

Можно доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы ткань была октаэдрической, является требование обращения в *0* кривизны ткани:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 = a_2 = a_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Одним из видов октаэдрической ткани является ткань [1, 2], образованная плоскостями. Существование такой ткани определяется теоремой Зауэра:

Всякая образованная плоскостями октаэдрическая ткань порождается общими касательными плоскостями двух различных квадрик (поверхностей второго класса). Справедливо обратное высказывание: *во всякой области, где через каждую точку проходят четыре различные касательные плоскости к двум данным квадрикам, эти плоскости образуют октаэдрическую ткань.*

Октаэдрические ткани, образованные плоскостями, могут применяться для моделирования так называемых «сотовых наполнителей» [3], используемых, в частности, в конструкциях несущих плоскостей летательных аппаратов.

Теперь рассмотрим образование пространственной ткани на основе методов проективной геометрии.

Пусть ***P*** – точка области ***V***, образованной поверхностями ткани ***M.*** Исходящие из точки ***P*** направления отобразим на точки некоторой, не проходящей через ***P***, плоскости ***П***, поставив в соответствие каждому направлению точку пересечения касательной в ***P*** к кривым этого направления с плоскостью ***П.*** Тогда касательным плоскостям к поверхностям $\sigma_j = 0$, удовлетворяющим условию (2), на плоскости ***П*** будут соответствовать четыре прямые, никакие три из которых не проходят через одну точку. Эти прямые, образующие на плоскости ***П*** полный четырех-сторонник, будем обозначать также – σ_j, пример приведен на рис. 2. *Полный четырех-сторонник* - это фигура, образованная четырьмя прямыми, из которых любые три прямые не будут пересекаться в одной и той же точке. В полном четырех-стороннике существуют вершины. Их шесть. В бесконечности могут располагаться вершины четырех-сторонника: одна, две или три. Это возможно, если, что одна из прямых, образующих четырех-сторонник, является бесконечно удаленной [4, 5].

У четырех-стороннике имеют место диагонали. Каждая из диагоналей соединяет две вершины четырех-сторонника, если эти вершины не лежат на одной из сторон четырех-сторонника. Из диагоналей четырех-сторонника составляется диагональный треугольник. Каждая сторона треугольника включает в себя две из вершин четырех-сторонника.

Полным четырех-сторонником называют плоскую фигуру, составленную из 4 неограниченных прямых. Полный четырех-сторонник имеет 6 вершин. Каждые две, не лежащие на одной стороне, называются противоположными.

Точно также направлениям, для которых $\tau_j = 0$, на плоскости $\boldsymbol{\Pi}$ соответствуют три прямые, не проходящие через одну точку. Эти прямые образуют диагональный трех-сторонник полного четырех-сторонника со стороны σ_j. Так, прямая τ_1, например, проходит через точки пересечения прямых σ_0 и σ_1 и прямых σ_2 и σ_3. Дифференциальным операторам $(\partial_j \pm \partial_k)$ соответствуют шесть вершин полного четырех-сторонника.

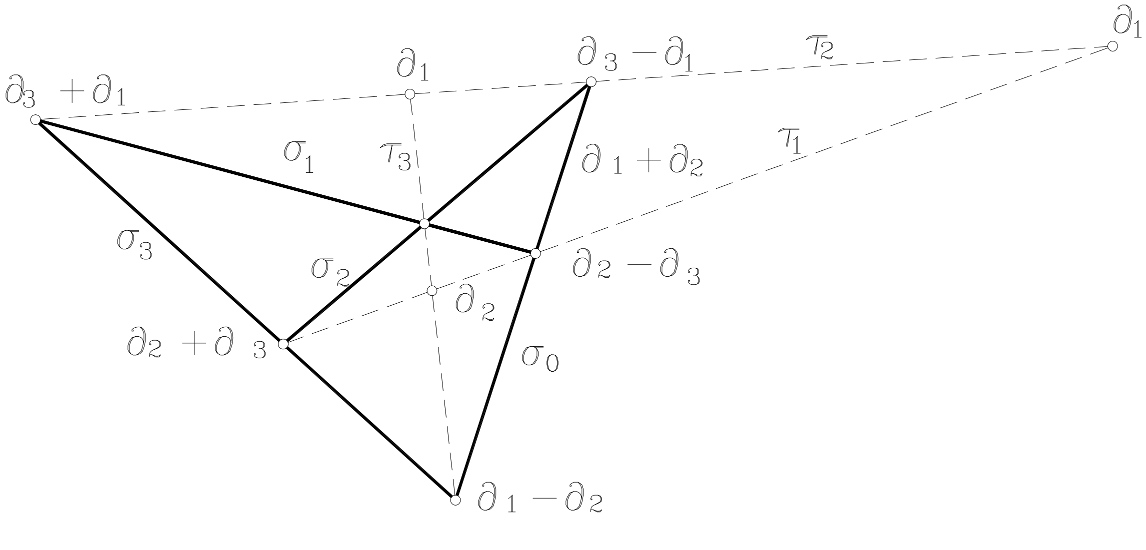

Рис. 2. – Полный четырех-сторонник

Можно доказать, что форма τ_1 с точностью до скалярного множителя является полным дифференциалом $\tau_1 = f_1 \cdot d\upsilon_1$, так что семейство поверхностей $\upsilon_1(x,y,z) = \upsilon_1 = const$ будет семейством интегральных поверхностей уравнения $\tau_1 = 0$. Назовем семейство $\upsilon_1(x,y,z) = \upsilon_1 = const$ семейством диагональных поверхностей ткани ***M***. Тогда имеем следующий результат: *если ткань **M** имеет два семейства диагональных поверхностей τ_1 и τ_2, то она имеет также и третье подобное семейство τ_3.*

Второй случай получения пространственной ткани заключается в следующем. На каждой поверхности $\boldsymbol{\Phi_0}$ семейства $\boldsymbol{\Phi_0}$... ткани ***M*** (интегральная поверхность с уравнением $\sigma_1 = 0$) остальные семейства поверхностей $\boldsymbol{\Phi_1}$, $\boldsymbol{\Phi_2}$, $\boldsymbol{\Phi_3}$ высекают криволинейную ткань $\boldsymbol{M^0}$, кривые которой (рис. 2) определяются операторами:

$$\partial_1^0 = \partial_2 - \partial_3,\ \partial_2^0 = \partial_3 - \partial_1,\ \partial_3^0 = \partial_1 - \partial_2.$$

Таким образом, в статье рассмотрены вопросы задания пространственных тканей, исследования их дифференциальных характеристик, определяются различные виды таких тканей, показана возможность практического применения ткани, образованной плоскостями.

Литература

1. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Конструирование плоскостей на базе плоской шестиугольной 3-ткани // Инженерный вестник Дона, 2015, №2 (часть 2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884.

2. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Моделирование 3-ткани для минимальных поверхностей // Инженерный вестник Дона, 2015, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2015/3371.

3. Бельченко Ю.М. Геометрическое моделирование заполнителей тел // Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции «Транспорт: наука, образование, производство (Транспорт-2016)». Рост. гос. ун-т путей сообщения. Ростов н/Д, 2016. – С.206-208

4. Рачковская Г.С. Построение кинематических линейчатых поверхностей на основе геометрической модели комплексного движения для внутреннего обкатывания в паре однополостных гиперболоидов вращения // Инженерный вестник Дона, 2016, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3635.

5. Туркеничева О.А., Туркеничева Л.А. Кривые линии в технике и естествознании // Современные прикладные исследования: материалы второй национальной научно-практической конференции, 21–25 май, г. Шахты / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. - Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2018. - С. 342-345.

6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

7. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

8. Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей: автореф. дис. д-р физ.-мат. наук наук: 01.01.04. – Казань, 2007. – 29 с.

9. Аракелян Г.С. О многомерных три-тканях: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. – М., 1983. – 141 с.

10. Пиджакова Л.М. Три-ткани с ковариантно-постоянными тензорами кривизны и кручения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2009. - 20 с.

References

1. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2 (chast' 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884.

2. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3371.

3. Bel'chenko Ju.M. Sbornik nauchnyh trudov Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Transport: nauka, obrazovanie, proizvodstvo (Transport-2016) ». Rost. gos. un-t putej soobshhenija. Rostov n/D, 2016. pp. 206-208.

4. Rachkovskaya G. S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2016/3635.

5. Turkenicheva O. A., Turkenicheva L. A. Sovremennye prikladnye issledovanija: materialy vtoroj nacional'noj nauchno-prakticheskoj konferencii, 21–25 maj, g. Shahty. Juzhno-Rossijskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet (NPI) imeni M.I. Platova. Novocherkassk: JuRGPU (NPI), 2018. pp. 342-345.

6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

7. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

8. Tolstikhina G. A. Algebra i geometrija tri-tkanej, obrazovannyh sloenijami raznyh razmernostej [Algebra and geometry of tri-tissues formed by foliations of different dimensions]. avtoref. dis. d-r fiz.-mat. nauk nauk: 01.01.04. Kazan', 2007. 29 p.

9. Arakelyan G. S. O mnogomernyh tri-tkanjah [About multidimensional three - fabrics]: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. M., 1983. 141 p.

10. Pagacova L. M. Tri-tkani s kovariantno-postojannymi tenzorami krivizny i kruchenija [Three-fabric with covariant constant tensors of curvature and torsion]: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. Tver, 2009. 20 p.