Отображение ортогональным проецированием четырехмерной гиперповерхности

А. А. Ляшков, В. С. Куликова

ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»

Во многих прикладных задачах, связанных с профилированием режущего инструмента, определяют огибающую семейства поверхностей. Наряду с классическим подходом [1 - 2] к определению огибающей, в последнее время используется и новый [3], использующий отображение ортогональным проецированием поверхности на плоскость: [4 - 6] и другие. Так, если спроецировать график однопараметрического семейства двумерных поверхностей в пространство R^4, то получим некоторую трехмерную гиперповерхность Σ. Дискриминанта этой гиперповерхности является огибающей рассматриваемого семейства. Исследование поверхности Σ при задании ее параметрическими уравнениями и уравнением в неявной форме проведено в работах [7 - 8], а его применение – в работах [9 - 10].

Отображение ортогональным проецированием четырехмерной поверхности и использование полученных результатов к определению огибающей двухпараметрического семейства поверхностей рассматривается ниже.

Пусть исходная четырехмерная гиперповерхность Σ_1 задана уравнением в неявном виде

$$F(x, y, z, u, v) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим отображения ортогональным проецированием этой поверхности по направлениям осей *u* и *v* на соответствующие координатные гиперплоскости.

Уравнения гиперплоскостей, касательных к гиперповерхности (1) в некоторой ее точке $M(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, записываются в виде

$$F_x \cdot (x - x_0) + F_y \cdot (y - y_0) + F_z \cdot (z - z_0) + F_u \cdot (u - u_0) + F_v \cdot (v - v_0) = 0. \tag{2}$$

В точках гиперповерхности, в которых касательные гиперплоскости параллельны оси *0U,* выполняется условие

$$F_u(x,y,z,u,v)=0. \qquad (3)$$

Будем рассматривать (3) как уравнение первой вспомогательной четырехмерной гиперповерхности Σ_1^1. Пересечение гиперповерхностей (1) и (3) определяют трехмерную гиперповерхность Σ_2 (рис.1), являющуюся криминантой гиперповерхности Σ_1 при ее ортогональном отображении вдоль оси *u*.

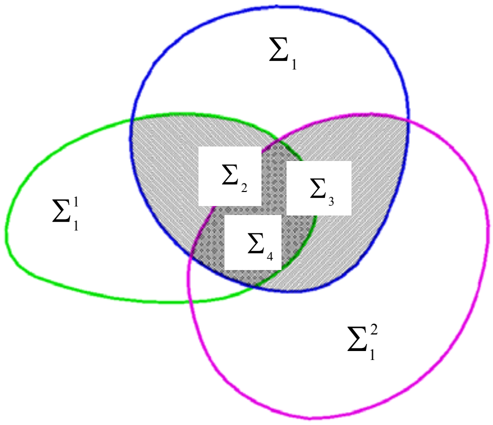

Рис. 1 – Схема взаимосвязи гиперповерхностей Σ_1, Σ_1^1, Σ_1^2 и криминант Σ_2, Σ_3, Σ_4, где Σ_1 – исходная четырехмерная гиперповерхность; Σ_1^1 и Σ_1^2 – первая и вторая вспомогательные четырехмерные гиперповерхности; Σ_2, Σ_3 и Σ_4 – криминанты гиперповерхности Σ_1 при ее отображении на гиперплоскости XYZV, XYZU и XYZ, соответственно

Четырех параметрическое множество плоскостей, касательных к гиперповерхности Σ_1^1 (3) в ее некоторой точке N(x_0,y_0, z_0, u_0,v_0), записывается в виде

$$F_{ux}\cdot(x-x_0)+F_{uy}\cdot(y-y_0)+F_{uz}\cdot(z-z_0)+F_{uu}\cdot(u-u_0)+F_{uv}\cdot(v-v_0)=0. \qquad (4)$$

Гиперплоскости (2) и (4) пересекаются по трехмерным гиперплоскостям, касающимся гиперповерхности Σ_2. В точках гиперповерхности (1), в которых касательные гиперплоскости параллельны оси *0V,* выполняется условие

$$F_v(x,y,z,u,v)=0. \qquad (5)$$

Полученное уравнение рассматриваем как уравнение второй вспомогательной четырехмерной гиперповерхности Σ_1^2.Пересечение четырехмерных гиперповерхностей (1) и (5) определяет трехмерную гиперповерхность Σ_3, являющуюся криминантой гиперповерхности Σ_1 при ее ортогональном отображении вдоль оси $0V$. Тогда четырех параметрическое множество плоскостей, касающихся гиперповерхности (5) в ее некоторой точке K(x_0,y_0,z_0, u_0,v_0), записывается уравнением в виде

$$F_{ux}\cdot(x-x_0)+F_{uy}\cdot(y-y_0)+F_{uz}\cdot(z-z_0)+F_{uu}\cdot(u-u_0)+F_{uv}\cdot(v-v_0)=0. \qquad (6)$$

Пересечение трехмерных гиперповерхностей Σ_3 и Σ_3 задает двумерную поверхность Σ_4, являющуюся криминантой гиперповерхности (1) при ее ортогональном отображении на гиперплоскость *XYZ* (по двум направлениям вдоль осей *u* и *v*).

Пусть точки *M, N* и *K* принадлежат не только соответствующим гиперповерхностям, но и двумерной поверхности Σ_4. Тогда касательная плоскость к этой двумерной поверхности определяется в пересечении гиперплоскостей (2), (4), (6). Рассматривая уравнения (2) и (4) как систему линейных уравнений относительно (u-u_0) и (v-v_0), получим

$$u-u_0=\frac{-A\cdot F_{uv}+A_1\cdot F_v}{\Delta}, v-v_0=\frac{A_1\cdot F_u+A\cdot F_{uu}}{\Delta},$$

где $A=F_x\cdot(x-x_0)+F_y\cdot(y-y_0)+F_z\cdot(z-z_0)$,

$A_1=F_{ux}\cdot(x-x_0)+F_{uy}\cdot(y-y_0)+F_{uz}\cdot(z-z_0)$, $\Delta=F_u\cdot F_{uv}+F_v\cdot F_{uu}$.

После подстановки полученных выражений в равенство (6), получим уравнение касательной плоскости к поверхности Σ_4

$$(x-x_0)\cdot\begin{vmatrix}F_x & F_u & F_v\\ F_{ux} & F_{uu} & F_{vu}\\ F_{vx} & F_{uv} & F_{vv}\end{vmatrix}+(y-y_0)\cdot\begin{vmatrix}F_y & F_u & F_v\\ F_{uy} & F_{uu} & F_{vu}\\ F_{vy} & F_{uv} & F_{vv}\end{vmatrix}+(z-z_0)\cdot\begin{vmatrix}F_z & F_u & F_v\\ F_{uz} & F_{uu} & F_{vu}\\ F_{vz} & F_{uv} & F_{vv}\end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Тогда из приведенных уравнений следует, что криминанта гиперповерхности (1) при ее отображении ортогональным проецированием на гиперплоскости по направлениям осей *0U* и *0V*, определяется системой уравнений (1), (3) и (5), при условиях

$$\left|F_x\right| + \left|F_y\right| + \left|F_z\right| \neq 0 \text{ и } \begin{vmatrix} F_{uu} & F_{vu} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В качестве примера, иллюстрирующего достоверность полученных результатов, рассмотрим четырехмерную гиперповерхность, определяемую уравнением

$$(x - R \cdot \cos u \cdot \cos v)^2 + (y - R \cdot \cos u \cdot \sin v)^2 + (z - R \cdot \sin u)^2 = r^2. \qquad (8)$$

Эта гиперповерхность получена отображением двухпараметрического семейства сфер радиуса r с центрами на сфере радиуса R (рис.2) в гиперпространство $XYZVU$.

Тогда в соответствии с (3) уравнение первой вспомогательной гиперповерхности будет

$$x \cdot R \cdot \sin u \cdot \cos v + y \cdot R \cdot \sin u \cdot \sin v + z \cdot R \cdot \cos u = 0. \qquad (9)$$

Откуда имеем

$$\sin u = \pm z\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos u = \pm\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\ . \qquad (10)$$

После подстановки зависимостей из (10) в равенство (9), получим уравнение трехмерной гиперповерхности, являющейся криминантой гиперповерхности (1) при ее отображении на гиперплоскость вдоль оси *0V*:

$$\begin{gathered} \left\{x - R \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \cdot \cos v\right\}^2 + \left\{y - R \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \cdot \sin v\right\}^2 + \\ + \left(z - \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 = r^2 \end{gathered} \qquad (11)$$

Для исследования этой гиперповерхности рассечем ее гиперплоскостями. Так для Z=0, имеем

$$x^2 + y^2 \pm 2R \cdot (x \cdot \cos v + y \cdot \sin v) = r^2 - R^2.$$

Графиком этого уравнения является двумерная циклическая поверхность с плоскостью параллелизма $0XY$ (рис. 3). Сечением гиперповерхности (11) гиперплоскостью V=0 является двумерная поверхность, определяемая уравнением

$$\left\{x - R \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \cdot \cos v\right\}^2 + \left(z - \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 = r^2.$$

Ее график представлен на рис. 4.

Рассмотрим теперь отображение гиперповерхности (1) вдоль оси *0U*. В этом случае уравнение второй вспомогательной гиперповерхности в соответствии с (5) получим в виде

$$x \cdot R \cdot \sin u \cdot \cos v + y \cdot R \cdot \sin u \cdot \sin v + z \cdot R \cdot \cos u = 0. \qquad (12)$$

Откуда

$$\sin v = \pm y\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad \text{а } \cos v = \pm y\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2}}. \qquad (13)$$

Трехмерная гиперповерхность (12) является криминантой гиперповерхности (1) при ее отображении вдоль оси *0U*. Криминанта гиперповерхности (1) при ее отображении вдоль осей *0U* и *0V* находится в пересечении первой и второй трехмерных гиперплоскостей. После подстановки выражений из (10) и (13) в (9) уравнение этой криминанты будет

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R \pm r)^2. \qquad (14)$$

Графиком этого уравнения являются две сферы с центром в начале системы координат и радиусами (R+r) и (R-r) (рис. 5). После преобразований уравнение (14) можно представить в виде

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)(R^2 + r^2) + (R^2 + r^2)^2 - 4 \cdot R^2 \cdot r^2 = 0.$$

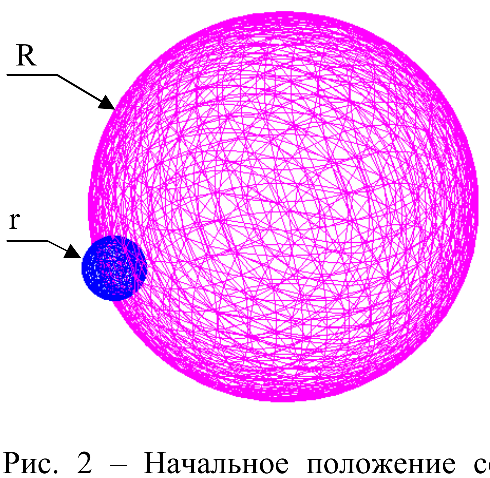

Рис. 2 – Начальное положение сферы радиусом r с центром на сфере радиусом R

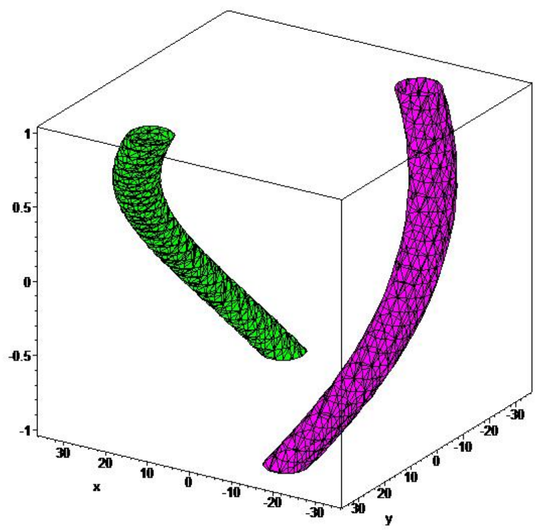

Рис. 3 – Сечение трехмерной гиперповерхности гиперплоскостью Z=0

Это уравнение определяет алгебраическую поверхность четвертого порядка. Она распадается на две поверхности второго порядка – две сферы.

Таким образом, проведенные исследования гиперповерхности и ее отображения ортогональным проецированием на координатные гиперплоскости позволили получить в общем виде огибающую двухпараметрического семейства поверхностей, а также необходимые условия ее существования.

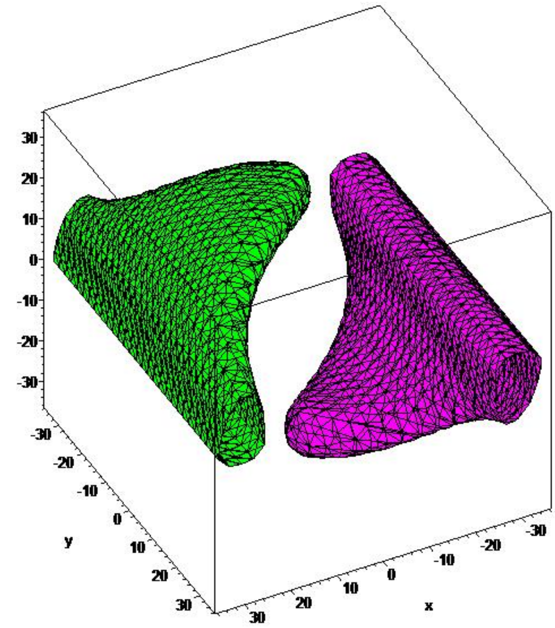

Рис. 4 – Сечение трехмерной гиперповерхности гиперплоскостью V=0

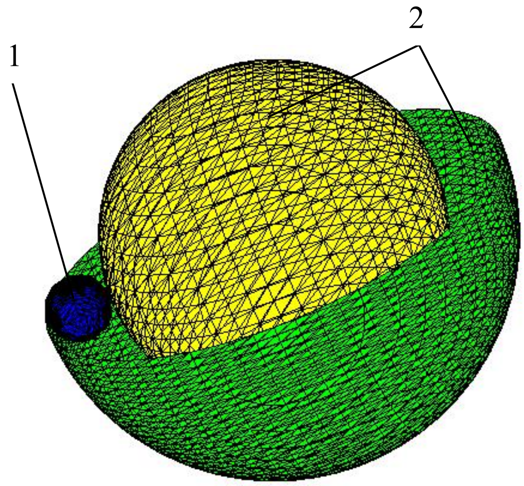

Рис. 5 – Образующая сфера 1 и огибающая 2 ее двух параметрического семейства

Полученные результаты апробированы на модели четырехмерной гиперповерхности, полученной отображением двухпараметрического семейства сфер в пятимерное пространство. Приведены как аналитические зависимости, так и соответствующие компьютерные полигональные модели сечений трехмерной гиперповерхности и двухмерной дискриминанты четырехмерной гиперповерхности.

Литература:

1. Лашнев, С. И. Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ [Текст]. / С. И. Лашнев, М. И Юликов. – М.: Машиностроение, 1975. – 392 с.

2. Litvin, F. L. Alfonso Fuentes Geometry and Applied Theory / Litvin, F. L. – Cembridge University Press, 2004. – 816 p.

3. Thom, R. Sur la theorie des envelopes / R. Thom // J. de math. pur et apple. – 1962. – Vol. 41. – № 2. – P. 177-192.

4. Арнольд, В. И. Особенности гладких отображений [Текст]. – Успехи мат. наук. – 1968. – т.XXIII, вып. 1(139) – С. 4–44.

5. Брус, Дж. Кривые и особенности. / Дж., Брус, П. Джиблин [Текст]. – М.: Мир, 1988. – 262 с.

6. Платонова, О. А. Проекции гладких поверхностей [Текст]. / О. А. Платонова // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. – 1984. – т. 10. – С. 135-149.

7. Ляшков, А. А.Отображение ортогональным проецированием гиперповерхности на гиперплоскость [Текст]/ А. А. Ляшков, В. Я. Волков // Вестник Иркутского Государственного Технического Университета. – 2012. – № 2. – 18-22 с.

8. Ляшков, А. А. Отображение ортогональным проецированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями [Текст] / А. А. Ляшков // Омский научный вестник. – 2012. – № 2(110). – 9-13 с.

9. Ляшков, А. А. Формообразование винтовой поверхности детали угловой фрезой [Электронный ресурс] / А. А. Ляшков // «Инженерный вестник Дона», 2012, №3. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/978 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Ляшков, А. А. Семейство поверхностей, заданное формулами преобразования координат, и его огибающая [Электронный ресурс] / А. А. Ляшков, А. М. Завьялов // «Инженерный вестник Дона», 2013, №1. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1512 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.