Инженерный вестник Дона, №3 (2020)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2020/6361

Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра

Д.А. Шляхин, М.А. Кальмова

Самарский государственный технический университет, Самара

Аннотация: Построено новое замкнутое решение связанной динамической задачи термоупругости для длинного цилиндра в случае изменения температуры на ее лицевых поверхностях (граничные условия 1-го рода). Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения движения и теплопроводности относительно радиальной компоненты вектора перемещений, а также функции изменения температурного поля.

Для решения задачи используется математический аппарат разделения переменных в виде обобщенного конечного интегрального преобразования (КИП). Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние и температурное поле упругого элемента при произвольном температурном внешнем воздействии. Проанализировано влияние скорости изменения нагрузки и физических свойств материала на инерционные свойства упругой системы, а также определены параметры, при которых возникает необходимость учитывать связанность механических и температурных полей.

Ключевые слова: длинный цилиндр, связанная задача термоупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования.

Введение. Для всестороннего анализа прочностных характеристик упругих систем возникает необходимость исследования их работы в условиях неравномерного нестационарного нагрева. На данный момент разработаны различные теории термоупругости (CTE, GHI-GHIII, LS) [1, 2], в результате исследования которых задачи решаются с достаточно разной степенью точности. Их математическая формулировка включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений, исследование которых связано с большими вычислительными трудностями. Вместе с тем широко используемые численные методы решения задач термоупругости не могут в полной мере учесть достаточно слабые эффекты связанности упругих и температурных полей. Поэтому здесь на первый план выходят математические методы, позволяющие получить замкнутые решения.

В связанной постановке замкнутые решения нестационарных задач термоупругости для длинного цилиндра, который рассматривается в данной работе, получены в немногих работах. В частности, исследование [3] выполнено при использовании классической (CTE) теории термоупругости методом конечных интегральных преобразований и удовлетворении условия теплоизоляции цилиндрических поверхностей [4]. Исследования [5], [6], проведенные в рамках гиперболических (GHII, GHIII) теорий термоупругости, позволяют провести анализ частотного уравнения, а также форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом волноводе. Работы [7,8] связаны с анализом напряженно-деформированного состояния одно- и многослойного длинного цилиндра (LS-теория). Исследования [9, 10] посвящены задачам теплопроводности элементов, выполненных из упругого и упругопластического материалов.

Здесь также необходимо отметить исследования [11, 12], посвященные анализу работы цилиндра конечных размеров с мембранным закреплением его торцов и теплоизоляцией цилиндрических поверхностей.

Целью настоящей работы является: на основании построенного нового решения связанной задачи термоупругости для длинного цилиндра при действии на его поверхностях температурной нагрузки (граничные условия 1-рода) проанализировать влияние инерционных характеристик упругой системы и скорости изменения ее объема на характер распределения температурного поля и НДС.

1. Постановка задачи. Пусть длинный полый изотропный цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область Ω: $\{a \le r_* \le b, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. На его незакрепленных поверхностях задана температура $\omega_1^*(t_*)$ ($r_* = a$) и $\omega_2^*(t_*)$ ($r_* = b$).

Дифференциальные уравнения движения и теплопроводности на основании закона Фурье в безразмерной форме имеют вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla U-\frac{\partial\Theta}{\partial r}-a_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0\,,\quad \nabla\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\nabla U+\Theta\right)=0\,; \qquad (1)$$

$$r=R,1 \qquad \frac{\partial U}{\partial r}+a_3\frac{U}{r}-\Theta=0\,,\qquad \Theta=\omega_1\left(\omega_2\right); \qquad (2)$$

$$t=0 \qquad U=\Theta=0\,,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=0\,; \qquad (3)$$

где $\left\{U,r,R\right\}=\left\{U^*,r_*,a\right\}/b$, $\left\{\Theta,\omega_1,\omega_2\right\}=a_4\gamma\left\{\Theta^*,\omega_1^*,\omega_2^*\right\}$, $t_*=a_5t$,

$a_1=\rho b^2a_4a_5^{-2}$, $a_2=T_0\gamma^2a_4k^{-1}$, $a_3=\nu\left(1-\nu\right)^{-1}$, $a_4=\dfrac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E\left(1-\nu\right)}$, $a_5=\dfrac{kb^2}{\Lambda_*}$,

$\gamma=\dfrac{E}{\left(1-2\nu\right)}\alpha_t$, $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}$, U^*,Θ^* – радиальная компонента вектора перемещений и приращение температуры в размерной форме ($\Theta^*=T-T_0$, – текущая температура тела и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют деформации и напряжения); E,ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала, Λ_*,k,α_t – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного теплового расширения материала.

2.Построение общего решения. На первом этапе решения выполняется процесс приведения неоднородных граничных условий (2) к однородным. Для этого вводятся новые функции $u\left(r,t\right)$, $\chi\left(r,t\right)$ связанные с $U\left(r,t\right)$, $\Theta\left(r,t\right)$ следующими соотношениями:

$$U\left(r,t\right)=H_1\left(r,t\right)+u\left(r,t\right),\qquad \Theta\left(r,t\right)=H_2\left(r,t\right)+\chi\left(r,t\right), \qquad (4)$$

где $H_1\left(r,t\right)=f_1\left(r\right)\omega_1\left(t\right)+f_2\left(r\right)\omega_2\left(t\right)$, $H_2\left(r,t\right)=f_3\left(r\right)\omega_1\left(t\right)+f_4\left(r\right)\omega_2\left(t\right)$,

Подстановка (4) в (1) – (3) при удовлетворении условий

$$\frac{df_1(r)}{dr}_{|r=1} + a_3 f_1(1) = 0, \quad \frac{df_1(r)}{dr}_{|r=R} + a_3 \frac{f_1(R)}{R} = 1, \quad \frac{df_2(r)}{dr}_{|r=1} + a_3 f_2(1) = 1, \quad (5)$$

$$\frac{df_2(r)}{dr}_{|r=R} + a_3 \frac{f_2(R)}{R} = 0, \quad f_3(R) = f_4(1) = 1, \quad f_3(1) = f_4(R) = 0,$$

позволяет получить новую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla u - \frac{\partial \chi}{\partial r} - a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R_1, \qquad \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t}(a_2 \nabla u + \chi) = R_2 \; ; \qquad (6)$$

$$r = R,1 \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + a_3 \frac{u}{r} = 0, \; \chi = 0 \; ; \qquad (7)$$

$$t = 0 \qquad u = -H_{1|t=0}, \; \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial t}_{|t=0}, \; \chi = -H_{2|t=0} \; ; \qquad (8)$$

где $R_1 = -\frac{\partial}{\partial r}\nabla H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}, \quad R_2 = -\nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}(a_2 \nabla H_1 + H_2).$

Начально–краевую задачу (6)–(8) решаем, используя алгоритм конечного интегрального преобразования (КИП) [4]. Для этого вводим на сегменте [R, 1] КИП с неизвестным ядром преобразования $K(\lambda_i, r)$:

$$G_1(\lambda_i, t) = \int_R^1 u(r,t) r \frac{dK(\lambda_i, r)}{dr} dr, \; G_2(\lambda_i, t) = \int_R^1 \chi(r,t) r K(\lambda_i, r) dr, \qquad (9)$$

$$\chi(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) \frac{dK(\lambda_i, r)}{dr} \|N_i\|^{-2}, \; \Theta(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t) K(\lambda_i, r) \|K_i\|^{-2},$$

$$\|N_i\|^2 = \int_R^1 \left(\frac{dK(\lambda_i, r)}{dr} \right)^2 r dr, \; \|K_i\|^2 = \int_R^1 K(\lambda_i, r)^2 r dr,$$

где λ_i − собственные значения, образующие счетное множество.

В результате использования алгоритма КИП получаем счетное множество задач Коши для трансформант $G_1(\lambda_i, t), G_2(\lambda_i, t)$:

$$a_1 \frac{d^2 G_1}{dt^2} + \lambda_i^2 G_1 + \lambda_i^2 G_2 = -R_{1H}, \qquad (10)$$

$$\frac{dG_2}{dt}+\lambda_i^2 G_2-a_2\frac{dG_1}{dt}=-R_{2H},$$

$$t=0\quad G_{1H}\left(\lambda_i,0\right)=A_1\left(\lambda_i\right),\ \frac{dG_{1H}\left(\lambda_i,t\right)}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{dA_1\left(\lambda_i\right)}{dt},\ G_{2H}\left(\lambda_i,0\right)=A_2\left(\lambda_i\right), \tag{11}$$

и однородную задачу относительно ядра преобразований:

$$\nabla\frac{dK}{dr}+\lambda_i^2 K=0, \tag{12}$$

$$r=R,1 \qquad K=0, \tag{13}$$

которая формируется при условии $a_3=1$.

В равенствах (10), (11) приняты обозначения $\left\{R_{2H},A_2\right\}=\int\limits_R^1\left\{R_2,-H_{2|t=0}\right\}rKdr$, $\left\{R_{1H},A_1,\frac{dA_1}{dt}\right\}=\int\limits_R^1\left\{R_1,-H_{1|t=0},-\frac{\partial H_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right\}r\frac{dK}{dr}dr$.

Система (10) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно трансформанты G_1:

$$a_1\frac{d^3G_1}{dt^3}+a_1\lambda_i^2\frac{d^2G_1}{dt^2}+\lambda_i^2\left(1+a_2\right)\frac{dG_1}{dr}+\lambda_i^4 G_1=R_H\ , \tag{14}$$

решение, которого имеет вид:

$$G_1=\sum_{n=1}^{3}D_{ni}\exp\left(A_{ni}t\right)+a_1^{-1}\sum_{m=1}^{3}B_{mi}^{-1}\int\limits_0^t R_H\left(\tau\right)\exp(A_{mi}\left(t-\tau\right))d\tau\ , \tag{15}$$

где $R_H=\lambda_i^2\left(R_{2H}-R_{1H}\right)-\frac{dR_{1H}}{dt}$, $B_{1i}=\left(A_{1i}-A_{2i}\right)\left(A_{1i}-A_{3i}\right)$, $B_{2i}=\left(A_{2i}-A_{1i}\right)\left(A_{2i}-A_{3i}\right)$, $B_{3i}=\left(A_{3i}-A_{1i}\right)\left(A_{3i}-A_{2i}\right)$, $A_{1i}\ldots A_{3i}$ – корни следующего характеристического уравнения:

$$a_1A_i^3+a_1\lambda_i^2A_i^2+\lambda_i^2\left(1+a_2\right)A_i+\lambda_i^4=0. \tag{16}$$

Трансформанта G_2 определяется из первого уравнения (10). Подстановка G_1,G_2 в начальные условия (11) позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1i}\ldots D_{3i}$.

Решение однородной задачи (12), (13) относительно ядра преобразований $K(\lambda_i, r)$ имеет вид:

$$K(\lambda_i, r) = J_0(\lambda_i r) - \frac{J_0(\lambda_i)}{Y_0(\lambda_i)} Y_0(\lambda_i r), \tag{17}$$

где λ_i определяются из следующего трансцендентного уравнения:

$$J_0(\lambda_i R) - \frac{J_0(\lambda_i)}{Y_0(\lambda_i)} Y_0(\lambda_i R) = 0, \tag{18}$$

где $J_0(\ldots)$, $Y_0(\ldots)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го родов нулевого порядка.

Окончательные выражения функций $U(r,t)$, $\Theta(r,t)$ получим, применяя к трансформантам G_1, G_2 формулы обращения (9). В результате, с учетом (4), (17) имеем:

$$U(r,t) = H_1(r,t) - \sum_{i=1}^{\infty} G_1(\lambda_i, t)\lambda_i^{-1}\left[J_1(\lambda_i r) - \frac{J_0(\lambda_i)}{Y_0(\lambda_i)} Y_1(\lambda_i r)\right]\left\|K_i\right\|^{-2}, \tag{19}$$

$$\Theta(r,t) = H_2(r,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_2(\lambda_i, t)\left[J_0(\lambda_i r) - \frac{J_0(\lambda_i)}{Y_0(\lambda_i)} Y_0(\lambda_i r)\right]\left\|K_i\right\|^{-2}.$$

Функции $f_1(r) \ldots f_4(r)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla f_1(r) = \frac{1}{r \ln R}, \ \frac{\partial}{\partial r}\nabla f_2(r) = -\frac{1}{r \ln R}, \ \nabla \frac{df_3(r)}{dr} = \nabla \frac{df_4(r)}{dr} = 0, \tag{20}$$

что позволяет существенно упростить правые части соотношений (6).

В результате с учетом условий (5) получаем:

$$f_1(r) = \frac{R^2}{2(1-R^2)}\left[\frac{(a_3-1)}{(1+a_3)} r - \frac{1}{r}\right] + \frac{r}{2\ln R}\left[\ln r - \frac{1}{(1+a_3)}\right], \ f_4(r) = \frac{\ln R - \ln r}{\ln R}, \tag{21}$$

$$f_2(r) = \frac{r}{(1+a_3)} + \frac{R^2}{2(R^2-1)}\left(\frac{(a_3-1) r}{(1+a_3)} - \frac{1}{r}\right) + \frac{r}{4\ln R}\left[1 - 2\ln r - \frac{(a_3-1)}{(1+a_3)}\right], \ f_3(r) = \frac{\ln r}{\ln R}.$$

3. Численный анализ результатов. В качестве примера рассматривается случай действия температурной нагрузки $\omega_1^*(t_*)$ на внутренней поверхности цилиндра:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*}t_*\right)H\left(t_{\max}^* - t_*\right) + H\left(t_* - t_{\max}^*\right)\right], \quad \omega_2^*(t_*) = 0\,, \qquad (22)$$

где $H(\tilde{t})-$ единичная функция Хэвисайда ($H(\tilde{t})=1$ при $\tilde{t} \ge 0$, $H(\tilde{t})=0$ при $\tilde{t} < 0$), $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$, $T_{\max}^*, t_{\max}^* -$ максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 100\,^0C$, $T_0 = 20\,^0C$).

Для оценки влияния инерционные свойства упругой системы на радиальные перемещения выполнялся расчет при варьировании параметра $a_1\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}$, который зависит от физических свойств материала, радиуса цилиндра b и скорости изменения температурной нагрузки. На рис. 1 приведены графики изменения радиальных перемещений $U(R,t)$ по времени t ($b=1$ м, $R=0.8$, $\nu=0.34$) для цилиндра, изготовленного из пластика [13]. Сплошной линией обозначены результаты при $t_{\max}^* = 2\times10^{-5}$ (с) ($t_{\max} = 1.7\times10^{-11}$), пунктирной – при $t_{\max}^* = 1\times10^{-4}$ (с) ($t_{\max} = 8.6\times10^{-11}$). Инерционные свойства для данных размеров конструкции становятся заметны при практически мгновенном изменении температурной нагрузки $t_{\max}^* = 2\times10^{-5}$ (с).

В общем случае в результате анализа расчетных соотношений и численных результатов расчета можно сделать вывод, что для цилиндра, изготовленного из пластика, инерционные свойства упругой системы проявляются при выполнении условия: $\dfrac{b}{t_{\max}^*} \ge 5\times10^4$ (м/с). Для элемента, изготовленного из алюминия [13], имеем: $\dfrac{b}{t_{\max}^*} \ge 3\times10^5$ (м/с).

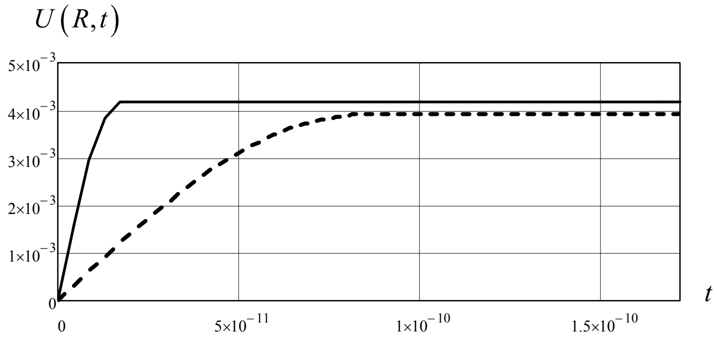

Рис.1. – Графики изменения радиальных перемещений $U(R,t)$ по времени t (сплошная линия – $t_{\max}=1.7\times10^{-11}$, пунктирная – $t_{\max}=8.6\times10^{-11}$)

Для оценки влияния скорости изменения объема тела ($a_2\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla U$) на температурное поле рассматривается также пример влияния тепловой нагрузки (22). На рис. 2 показаны графики изменения температуры $\Theta(0.9,t)$ по времени t, а на рис. 3 – изменение нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max}),\sigma_{rr}(r,t_{\max})$ по радиальной координате r ($R=0.8$, $\nu=0.34$, $t^*_{\max}=1$ с, $\sigma_{\theta\theta}=a_3^{-1}\dfrac{\partial U}{\partial r}+\dfrac{U}{r}-\Theta$). Цифрами 1, 2 обозначены результаты расчета $\Theta(0.9,t)$, $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max})$ соответственно при $a_2=2\times10^{-3}$ и $a_2=0.2$, а пунктирной линией характер изменения во времени $\omega_1^*(t_*)$ и нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r,t_{\max})$ по радиальной координате ($a_2=0.2$).

На основании проведенного расчета можно сделать вывод о том, что изменение объема тела приводит к перераспределению в нем температурного поля при численных значениях коэффициента связанности порядка 0.2. Данному значению a_2 соответствуют материалы, имеющие большой коэффициент линейного теплового расширения, в частности различные поливиниловые составы [14].

Следует отметить, что учет изменения объема приводит к снижению температуры внутри исследуемого тела, что в свою очередь приводит к изменению $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max})$. Кроме того, в рассматриваемом примере допущение, используемое при вычислении компоненты ядра преобразований $K(\lambda_i,r)$ ($a_3=1$), не оказывает существенное влияния и первое граничное условия (2) удовлетворяется.

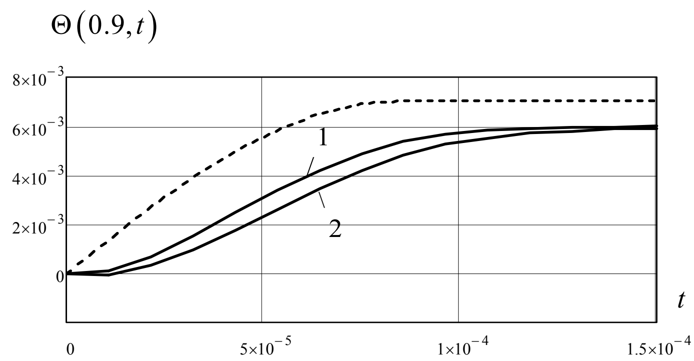

Рис.2. – Графики изменения температуры $\Theta(0.9,t)$ по времени t (1– $a_2=2\times10^{-3}$, 2– $a_2=0.2$, пунктирная линия – характер изменения во времени $\omega_1^*(t_*)$)

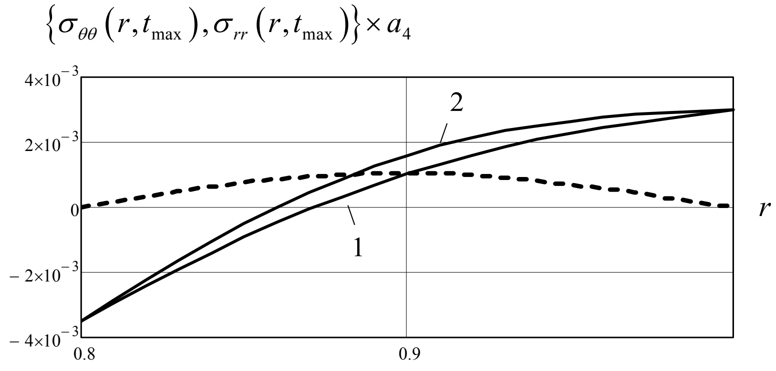

Рис.3. – Графики изменения нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max}),\sigma_{rr}(r,t_{\max})$ по радиальной координате r (1– $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max})$ при $a_2=2\times10^{-3}$, 2– $\sigma_{\theta\theta}(r,t_{\max})$ при $a_2=0.2$, пунктирная линия – $\sigma_{rr}(r,t_{\max})$)

В заключение следует отметить, что построенный алгоритм расчета позволяет также исследовать конструкцию в случае действия на ее цилиндрических поверхностях механической нагрузки в виде нормальных напряжений.

Литература

1. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.мат. науки. 2011. №2(23). С.53−61.

2. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Изд. 2-е доп. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.

3. Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // Прикл. мех. АН УССР. 1982. Т. 18, № 6. С. 34–41.

4. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.

5. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т.9, вып. 4(2).С 94–127.

6. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Ревинский Р.А. Прохождение обобщенной GHIII- термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // Изв. Сарат. ун–та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т.11, вып. 1. С 59–70.

7. Fu J.W., Chen Z.T., Qian L.F. Coupled thermoelastic analysis a multi−layered hollow cylinder based on the C−T theory and its application on functionally graded materials // Composite Structures. 131 (2015). pp. 139–150.

8. Khader S. E. Thermoelastic problem for an infinitely long annular cylinder without energy dissipation (GN theory) // European Journal of Advances in Engineering and Technology, 2018, 5(6). pp. 408-413.

9. Еремин А.В., Губарева К.В., Шульга А.С. Исследование процесса теплопроводности в пластине с внутренними источниками теплоты постоянной мощности // Инженерный вестник Дона, 2019, №6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2019/604.

10. Бердзенишвили Г.Г. и др. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника // Инженерный вестник Дона, 2018, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4973

11. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // Вестн. Сам. гос. ун-та. 2003. № 4 (30). С. 112–124.

12. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 138–154.

13. Кухлинг Х. Справочник по физике. Москва, Мир, 1982. 519 с.

14. Кобзарь В.Н., Фильштинский Л.А. Плоская динамическая задача связанной термоупругости // ПММ, 2008.Т.72. Вып. 5. С. 842-851.

References

1. Radaev Yu.N., Taranova M.V. Vestn. Sam. gos. texn. un−ta. Ser. Fiz.mat. nauki. 2011. №2 (23). pp.53−61.

2. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskij S.Yu. Volnovy`e yavleniya teploprovodnosti. Sistemno-strukturny`j podxod [Wave phenomena of heat conductivity. System and structural approach]. Izd. 2-e dop. M.: Editorial URSS, 2004. 296 p.

3. Seniczkij Yu.E`. Prikl. mex. AN USSR. 1982. T. 18, № 6. pp. 34–41.

4. Kovalenko A.D. Vvedenie v termouprugost` [Introduction to thermoelasticity]. Kiev: Nauk. dumka, 1965. 204 p.

5. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D.A. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Matematika. Mexanika. Informatika.2009. T.9, vy`p. 4(2). pp. 94–127.

6. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Revinskij R.A. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Matematika. Mexanika. Informatika. 2011. T.11, vy`p. 1. pp. 59–70.

7. Fu J.W., Chen Z.T., Qian L.F. Composite Structures. 131 (2015). pp. 139–150.

8. Khader S. E. European Journal of Advances in Engineering and Technology, 2018, 5(6). pp. 408-413.

9. Eremin A.V., Gubareva K.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2019/604.

10. Berdzenishvili G. G. I dr. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4973.

11. Ly`chev S.A. Vestn. Sam. gos. un-ta. 2003. № 4 (30). pp. 112–124.

12. Ly`chev S.A., Manzhirov A.V., Yuber S.V. Izv. RAN. MTT. 2010. № 4. pp. 138–154.

13. Kuxling X. Spravochnik po fizike [Reference book on physics]. Moskva, Mir, 1982. 519 p.

14. Kobzar` V.N., Fil`shtinskij L.A. PMM, 2008.T.72. Vyp. 5. pp. 842-851.