Инженерный вестник Дона, №12 (2020)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2020/6736

Калибровка умеренно устойчивых моделей Леви по курсам криптовалют

А.С. Гречко[1], *О.Е. Кудрявцев*[2]

[1]*ООО «Парадигма», Ростов-на-Дону*
[2]*Ростовский филиал Российской таможенной академии*

Аннотация: В данной статье мы рассматриваем проблему моделирования динамики криптовалют с помощью широкого класса умеренно устойчивых процессов Леви. На первом шаге оценивается обобщенный индекс Блюменталя-Гетура на основе реализованной степенной вариации ряда логарифмических доходностей курсов криптовалют. Мы рассматриваем случай, который соответствует процессам Леви ограниченной вариации, когда индекс активности скачков меньше единицы. Затем моделируемый процесс представляется как последовательность положительных и отрицательных скачков Леви за короткие периоды времени. Мы калибруем модель по искусственным цифровым опционов в одно касание, которые представляют собой статистические вероятности пересечения заранее определенных барьеров. В таком представлении становится возможным применение явных формул факторизации Винера-Хопфа для определения цены синтетических цифровых опционов в одно касание. Предложенная методика упрощает подгонку параметров негауссовских процессов Леви с активностью скачков, не превышающей 1.
Ключевые слова: математическое моделирование, криптовалюты, умеренно устойчивые модели Леви, модель CGMY, индекс Блюменталя-Гетура, опционы.

Резкий рост цены биткоина, перешедшего через планку в 20 тыс. долларов, в очередной раз показал актуальность задачи математического моделирования котировок криптовалют. В отличие от традиционных финансовых активов (фиатных валют, драгоценных металлов, акций и др.), криптовалюты демонстрируют очень существенные колебания курсов, позволяя трейдерам получать прибыль в разы превышающую вложения. Вместе с тем риск потерять все вложения на криптобирже существенно выше, чем на классическом финансовом рынке. Резкие скачки в курсах криптовалют позволяют сделать вывод, что традиционные гауссовы модели с непрерывными траекториями не являются адекватными для такого типа активов.

Задача подбора параметров модели по реальным рыночным ценам является одной из самых важных в области вычислительной финансовой математики. В таких задачах всегда возникает проблема выбора между простотой и адекватностью моделей. С одной стороны, слишком простые модели неадекватно описывают реальные ценовые процессы. С другой стороны, чрезмерно сложные модели не позволяют легко решить сопутствующие вычислительные вопросы (например, найти цены экзотических опционов или оценить риски).

Как показывают эмпирические исследования, невозможно адекватно описать цены криптовалюты с помощью диффузионных моделей с непрерывными траекториями (см., например, [1]). В частности, в [1] показано, что процессы Леви, допускающие бесконечное количество микроскачков, больше подходят для моделирования котировок на криптовалюты. Процессы Леви применяются в задачах моделирования, как в финансах [2], так и в физике [3]. Подробнее о процессах Леви можно прочитать в монографиях [2,4].

Как показывают исследования, проведенные в [5], в 2017 и 2018 годах временные ряды логарифмической доходности таких ключевых валют криптовалют, как биткоин (BTC) и эфир (ETH) по своим характеристикам соответствовали умеренно устойчивым процессам Леви, обобщенный индекс Блюменталя-Гетура которых меньше 1.

Цель данного исследования – предложить новую методику калибровки умеренно устойчивых процессов Леви с ограниченной вариацией скачков по данным о котировках криптовалют, развивающие идеи [5].

Классические методы подбора параметров стохастических процессов при моделировании динамики курсов акций осуществляется на основе данных доски опционов с разными ценами исполнения [6, 7]. Подробное описание видов опционов и классических принципов их оценивания можно найти в [8]. В настоящее время, рынок производных финансовых инструментов на криптовалюты только начинает развиваться, поэтому стандартные подходы к подбору параметров моделей Леви в случае криптовалют не применимы. В [1] был предложен новый подход, предполагающий калибровку моделей Леви по вероятностям пересечения курсом криптовалюты определенного набора ценовых барьеров.

Напомним, что процесс Леви X_t можно однозначно описать через характеристическую экспоненту $\psi(\xi) = -\frac{1}{t} \ln E\left[e^{i\xi X_t}\right]$. В частности, характеристическая экспонента процесса Леви без диффузионной компоненты со скачками ограниченной вариации может быть записана по формуле Леви-Хинчина:

$$\psi(\xi) = -i\mu\,\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - e^{i\xi\,y}\right)\ \Pi(dy), \qquad (1)$$

где мера Леви $\Pi(dy)$ удовлетворяет условию $\int_R \min\{1,\ y\}\Pi(dy) < +\infty$.

Например, характеристическая экспонента (1) умеренно устойчивых процессов Леви (англ. Tempered Stable Levy processes, [2]) с ограниченной вариацией скачков имеет вид:

$$\psi(\xi) = -i\mu\xi + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+{}^{\nu_+} - (\lambda_+ + i\xi)^{\nu_+}]$$

$$+c_-\Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- - i\xi)^{\nu_-}]$$

где $\nu_+, \nu_- \in\ (0,1),\ c_+, c_-\ > 0,\ \mu \in\ R$, и $\lambda_+ < -1 < 0 < -\lambda_-$.

$$\Pi(dx) = c_+\ e^{\lambda_+ x}|x|^{-\nu_+\ -1}1_{\{x<0\}}dx + c_- e^{\lambda_- x}|x|^{-\nu_-\ -1}1_{\{x>0\}}dx.$$

Показатели ν_-, ν_+ характеризуют активность скачков вверх и вниз, наибольший из которых соответствует обобщенному индексу Блюменталя-Гетура [9]. В частном случае, при $c_- = c_+ = c$ и $\nu_- = \nu_+ = \nu$, характеристическая экспонента $\psi(\xi)$ описывает популярную финансовую модель CGMY [10].

Будем описывать курс криптовалюты с помощью экспоненциального процесса Леви $S_t = S_0 e^{X_t}$. Как и в [5], проведем оценку индекса активности $\beta_{X,t}$ процесса X на основе динамического ряда логарифмической доходности $x_j = \ln(S_j/S_{j-1})$ с лагом по времени в одну минуту, чтобы охарактеризовать обобщенный индекс Блюменталя-Гетура. Необходимые для расчета формулы представлены в [9].

Анализ дневных значений $\beta_{X,t}$, показал, что в течение 2017 и 2018 года индексы активности курсов криптовалют биткоин и эфир находились левее единицы с высокой долей вероятности, см. также [5]. В начале 2019 года ситуация сохранилась. На рис.1 показано распределение индекса активности скачков по дням за первый квартал 2019 года. Среднее значение обобщенного индекса Блюменталя-Гетура составило 0.7398 с доверительным интервалом для среднего (0.705997,0.773617).

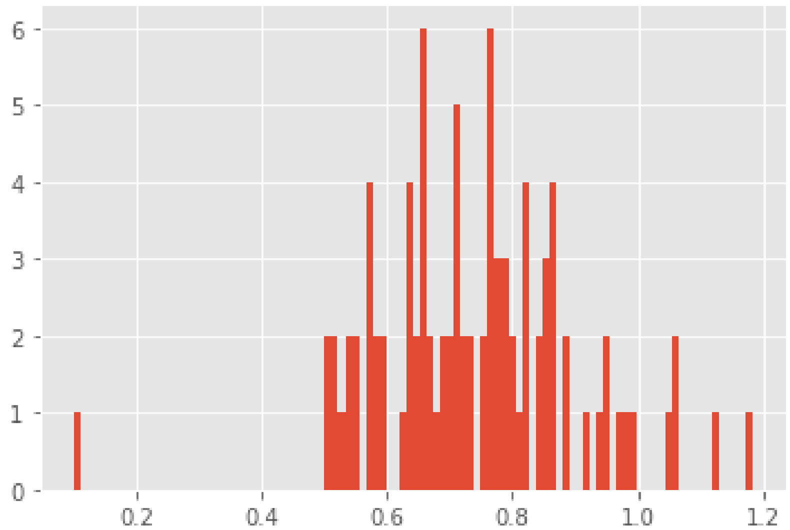

Рис. 1. – Распределение индекса активности скачков по количеству дней

Напомним, что при $\beta_{X,t} < 1$ гауссова компонента процесса Леви полностью отсутствует и индекс активности характеризует активность скачков (например, для модели CGMY с нулевым сносом $\nu = \beta_{X,t}$).

В данной статье предлагается новый метод калибровки чисто негауссовских процессов Леви со скачками конечной вариации по курсам криптовалют. Ключевая идея, лежащая в основе нашего подхода, состоит в том, чтобы представить рассматриваемый процесс как последовательность положительных и отрицательных скачков Леви за короткие периоды времени Δt:

$$X_{k\Delta t} - X_{(k-1)\Delta t} = X^{+}_{k,1,\Delta t/2} + X^{-}_{k,\Delta t} + X^{+}_{k,2,\Delta t/2},\ k = 0,1,\ldots,$$

где $X^{+}_{k,1,\Delta t/2} \sim X^{+}_{\Delta t/2}$, $X^{+}_{k,2,\Delta t/2} \sim X^{+}_{\Delta t/2}$, $X^{-}_{k,\Delta t} \sim X^{-}_{\Delta t}$, а процессы $X^{+}_{t}, -X^{-}_{t}$ являются субординаторами (процессами Леви, траектории которых не убывают), такими что $X_t = X^{+}_{t} - X^{-}_{t}$. Иными словами, изменение цены за каждую минуту мы моделируем как последовательность скачка вниз, вверх и снова вниз.

Заметим, что в этом случае, характеристическая экспонента процесса Леви X^{+}_{t} будет иметь вид $\psi_{+}(\xi) = c_{+}\Gamma(-\nu_{+})[\lambda_{+}{}^{\nu_{+}} - (\lambda_{+} + i\xi)^{\nu_{+}}]$, а соответствующая характеристическая экспонента X^{-}_{t} записывается в виде: $\psi_{-}(\xi) = c_{-}\Gamma(-\nu_{-})[(-\lambda_{-})^{\nu_{-}} - (-\lambda_{-} - i\xi)^{\nu_{-}}]$, где $\nu_{+}, \nu_{-} \in (0,1)$, $c_{+}, c_{-} > 0$, и $\lambda_{+} < -1 < 0 < -\lambda_{-}$.

По аналогии с [1], мы калибруем модель по искусственным цифровым опционов в одно касание, которые представляют собой статистические вероятности пересечения заранее определенных барьеров. Как и в [11], мы предлагаем использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье в сочетании с методом Винера-Хопфа. Основным преимуществом нашего подхода является применение явных формул факторизации Винера-Хопфа для определения цены синтетических цифровых опционов в одно касание в рамках таких моделей. Предложенная методика упрощает подгонку параметров негауссовских процессов Леви с активностью скачков, не превышающей 1. По сути, мы заменяем исходный процесс с непрерывным временем на дискретный процесс, аппроксимирующий умеренно устойчивый процесс Леви. Учитывая, что приближающий дискретный процесс позволяет быстро и эффективно оценивать экзотические опционы, эта модель может быть использована на практике для вычисления цен опционов на криптовалюты (например, на криптобирже LedgerX, где торгуются опционы на биткоин), когда параметры процесса уже подобраны.

Анализируя данные по котировкам биткоина за весь 2019 год, мы получили, что средняя оценка обобщенного индекса Блюменталя-Гетура возросла до 1.1948 с доверительным интервалом для среднего: (1.15189,1.23761). В 2020 году наблюдается похожая картина. Таким образом, возникает необходимость разработки методов калибровки для процессов Леви с неограниченной вариацией скачков.

Благодарность. *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00910А.*

Литература

1. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Статистические методы калибровки моделей цен криптовалют // Учет и статистика. 2018. №4. С. 67-76.
2. Cont R., Tankov P., 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC. 527p.
3. Мисюра В.В., Мисюра И.В. Обработка и фильтрация сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
4. Sato K.I., 1999. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press. 500 p.

5. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Калибровка умеренно устойчивых моделей Леви по данным криптовалют Bitcoin и Ethereum // Инженерный вестник Дона, 2016, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2019/6113.
6. Comte F., Genon-Catalot V., 2011. Estimation for Levy processes from high-frequency data within a long time interval. The Annals of Statistics, 2: 803–837.
7. Cont R., Tankov P., 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. Journal of Computational Finance, 3: 1–50.
8. Hull J.C., 2012. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall. 863 p.
9. Todorov V., Tauchen G., 2010. Activity signature functions for high-frequency data analysis. Journal of Econometrics, 2(154): 125 - 138.
10. Carr P., Madan D.B., Geman H., Yor M., 2002. The fine structure of asset returns:An empirical investigation. The Journal of Business, 2: 305–333.
11. Kudryavtsev O., Luzhetskaya P., 2020. The Wiener-Hopf Factorization for Pricing Options Made Easy. Engineering Letters, 4(28): 1310-1317.

References

1. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Uchet i statistika. 2018. №4. pp. 67-76.
2. Cont R., Tankov P., 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC. 527p.
3. Misyura V.V., Misyura I.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
4. Sato K.I., 1999. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press. 500 p.
5. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2019/6113.
6. Comte F., Genon-Catalot V., 2011. Estimation for Levy processes from high-frequency data within a long time interval. The Annals of Statistics, 2: 803–837.
7. Cont R., Tankov P., 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. Journal of Computational Finance, 3: 1–50.
8. Hull J.C., 2012. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall. 863 p.
9. Todorov V., Tauchen G., 2010. Journal of Econometrics, 2(154): 125 - 138.
10. Carr P., Madan D.B., Geman H., Yor M., 2002. The Journal of Business, 2: 305–333.

11. Kudryavtsev O., Luzhetskaya P., 2020. The Wiener-Hopf Factorization for Pricing Options Made Easy. Engineering Letters, 4(28): 1310-1317.