Инженерный вестник Дона, №2 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2022/7442

Моделирование колебания мембраны шестиугольной формы

Н.А. Чернышов, Н.А. Голомидов, А.И. Маслиев

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация: В настоящей работе представлено моделирование шестиугольной мембраны. Получены некоторые частные решения для задачи о свободных колебаниях мембраны правильной шестиугольной формы с различным заданным начальным изгибом поверхности и найдены собственные частоты колебаний. Полученный результат можно использовать при моделировании конструкций крыла в форме шестиугольника таких летательных аппаратов как параплан.

Ключевые слова: Моделирование крыла шестиугольной формы, свободные колебания мембраны, мембрана правильной шестиугольной формы, собственные частоты колебаний.

Введение

В современном мире большое значение находят конструкции с применением мембран различной формы. В строительстве, например, применяют сотовые заполнители для усиления каркасных стен, панелей, дверей. Корпус военных и гражданских самолетов также внутри обшивается сотовыми заполнителями, что позволяет увеличить прочность несущих конструкций и повысить шумоизоляцию самолета. В космических аппаратах сотовые структуры позволяют увеличить прочность корпуса и уменьшить массу. В настоящее время получены аналитические решения о свободных колебаниях мембран прямоугольной, треугольной и круглой формы. Решения задач для мембран других форм имеют большое значение в различных областях науки и техники. Целью настоящей работы является моделирование свободных колебаний мембраны в форме правильного шестиугольника при различных начальных условиях. Получено решение методом разделения переменных [1,2], найдены собственные частоты и формы мембраны. В теории уравнения математической физики известны решения для некоторых форм, таких, как треугольник, прямоугольник, круг. В [3] рассмотрены колебания треугольной пластины с учетом осевых сил, решение построено численным методом Рэлея-Ритца. Методом множителей Лагранжа решается задача о свободных колебаниях треугольных пластин, имеющих сложные опорные условия [4]. В работах [5,6] построена модель колебания треугольной упругой пластины при различных нагрузках. Для демпфирования колебаний часто используются вязкоупругие материалы. Этот случай рассмотрен в [7].

Постановка задачи

Мембрана правильной шестиугольной формы совершает свободные колебания перпендикулярно плоскости XOY. В качестве мембраны может выступать упругая свободно изгибающаяся натянутая пленка. Она имеет малую толщину и ее поперечные колебания малы по сравнению с размерами.

В начальный момент времени $t=0$ мембрана имеет определенную форму и затем начинает совершать свободные колебания вследствие нарушения положения равновесия. Эти колебания можно описать дифференциальным уравнением [8]:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

где W – перемещение точек мембраны относительно XOY, t – время.

Граничные условия примем следующими:

$$\mathrm{W}\big|_{\Gamma}=0 \qquad (2)$$

Начальные условия выберем такими:

$$\mathrm{W}\big|_{t=0}=f(x,y), \quad \left.\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (3)$$

Будем искать решение в виде [9]:

$$\mathrm{W}=\mathrm{U}(x,y)\mathrm{T}(t). \qquad (4)$$

После преобразований получим дифференциальные уравнения:

$$\mathrm{T}''+a^2\lambda^2\mathrm{T}=0 \qquad (5)$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0 \quad (6)$$

общее решения уравнения (5):

$$T = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t$$

Решение задачи

Для решения задачи необходимо ввести вспомогательные переменные ξ_i, i=1,2,3 (рис. 1):

$$\xi_1 = y,\ \ \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y\right),\ \ \xi_3 = h - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + y\right),\ h \text{ – высота треугольника} \quad (7)$$

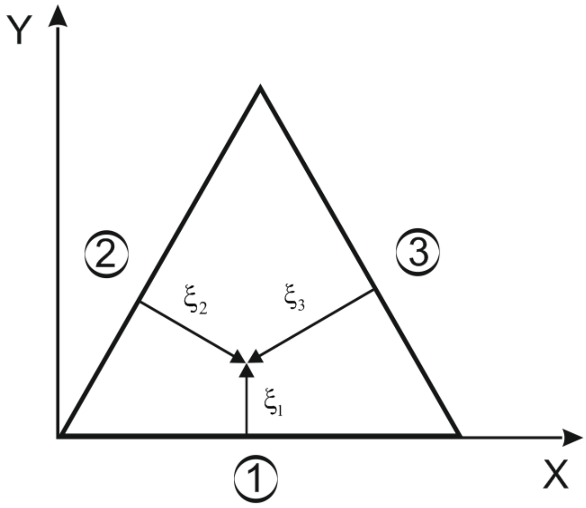

Рис. 1. – Геометрический смысл переменных $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$.

Эти переменные обладают рядом свойств:

1. Уравнения сторон треугольника (рис. 1) следующие:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \quad (8)$$

2. Сумма ξ_i равна высоте.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = h \quad (9)$$

3. Дифференциальная замена:

$$\Delta F(\xi_i) = \frac{d^2 F(\xi_i)}{d\xi_i^2} \quad (10)$$

Решение уравнения (6) для мембраны правильной треугольной формы получено в [10]:

$$U_n = C\left(\sin\lambda_n\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\lambda_n\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\lambda_n\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \quad (11)$$

где $\lambda_n = \dfrac{2\pi n}{h}$, $n=1,2,3...$ – собственные частоты, C – константа.

Вернемся теперь к шестиугольнику (рис. 2). Он получается из правильного треугольника, если параллельно каждой его стороне на расстоянии l провести прямые и отсечь лишние части.

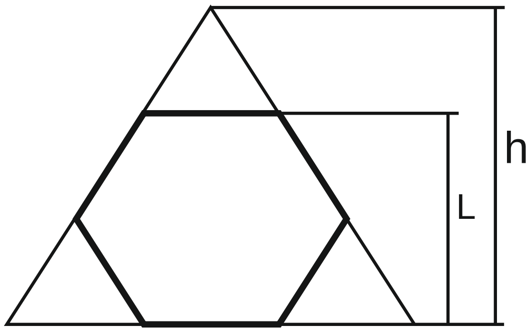

Рис. 2. – Геометрические размеры шестиугольника.

Граничные условия для шестиугольника будут иметь вид:

$$\xi_1=0,\ \xi_2=0,\ \xi_3=0,\ \xi_1=l,\ \xi_2=l,\ \xi_3=l\,. \quad (12)$$

Учитывая это решение уравнения (6) для мембраны правильной шестиугольной формы будет следующим:

$$U_n = C\left(\sin\lambda_n\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\lambda_n\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\lambda_n\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \quad (13)$$

где $\lambda_n = \dfrac{4\pi n}{l}$, $n=1,2,3...$ – собственные частоты шестиугольной мембраны.

Начальные скорости (3) всех точек мембраны равны нулю, следовательно $B=0$. Обозначим постоянную $b_n = AC$. Получим бесчисленное множество частных решений уравнения (1):

$$W_n = b_n \cos\frac{4\pi n}{l}at\left(\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \quad (14)$$

Общее решение уравнения (1) получим, сложив все частные решения (14)

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{4\pi n}{l}at\left(\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \quad (15)$$

Так как мембрана имеет в момент времени $t=0$ начальную форму (3), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right)= \\ = f_1\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+f_2\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+f_3\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right) \quad (16)$$

где $f(x,y)=f_1\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+f_2\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+f_3\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)$

Необходимо, чтобы начальная форма удовлетворяла граничным условиям (12) и возможно было бы найти решение уравнения (16). Рассмотрим частный случай и примем:

$$f(x,y)=\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi n}{l}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)$$

Тогда $b_n=1$. Принимая $n=1,2,3,...$ получим различные начальные формы. На рис. 3 показана первая форма колебаний мембраны при $n=1$.

Общее решение при $n=1$.

$$W=\cos\left(\frac{4\pi}{l}at\right)\left(\sin\frac{4\pi}{l}\left(\xi_1-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi}{l}\left(\xi_2-\frac{h}{2}\right)+\sin\frac{4\pi}{l}\left(\xi_3-\frac{h}{2}\right)\right) \quad (17)$$

В более удобной форме общее решение после преобразований можно представить:

$$W=\cos\left(\frac{4\pi}{l}at\right)\sin\frac{2\pi}{l}\xi_1\sin\frac{2\pi}{l}\xi_2\sin\frac{2\pi}{l}\xi_3 \quad (18)$$

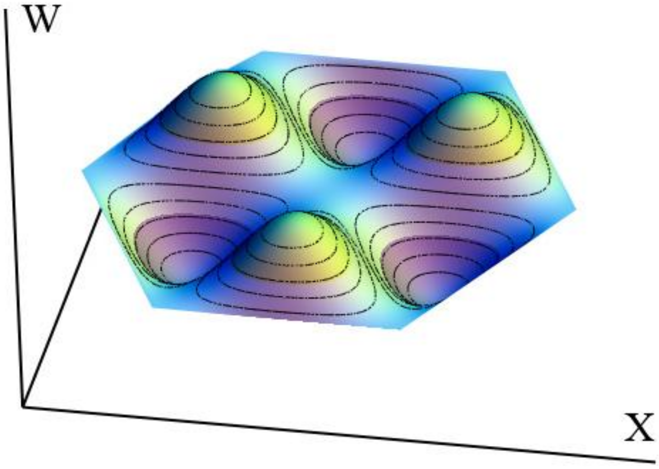

Рис. 3. – Первая начальная форма мембраны.

На рис. 4 показана вторая форма колебаний мембраны при $n = 2$.

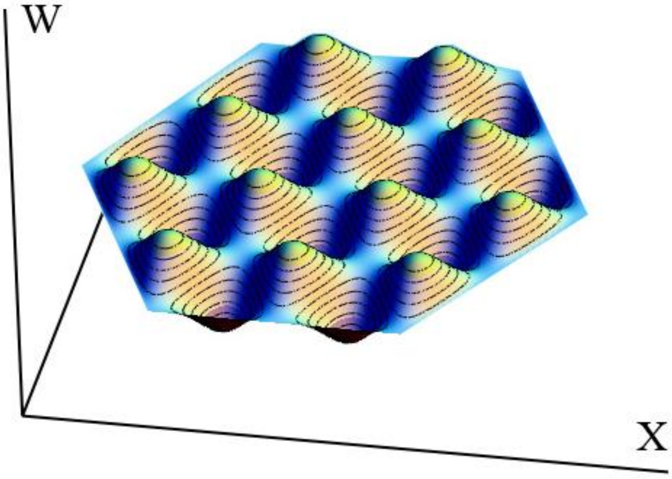

Рис. 4. – Вторая начальная форма мембраны.

Общее решение для произвольного n имеет вид:

$$\mathrm{W} = \cos\left(\frac{4\pi n}{l} at\right) \sin\frac{2\pi n}{l}\xi_1 \sin\frac{2\pi n}{l}\xi_2 \sin\frac{2\pi n}{l}\xi_3 \tag{19}$$

Если сравнить полученное решение с известными задачами о свободных колебаниях мембран прямоугольной и треугольной формы, то можно заметить определенное сходство, например в (19) присутствует произведение синусов, что также способствует гармоническим колебаниям. Формы мембраны (рис. 3,4) имеют такие же зоны пучностей и узловые линии, которые наблюдаются и для известных решений.

В работе найдены частные решения задачи о свободных колебаниях мембраны правильной шестиугольной формы с начальным отклонением. Выведены формулы для собственных частот и изображены первые две формы колебания мембраны. Полученный результат может быть использован для моделирования поведения крыла в форме шестиугольника таких летательных аппаратов как параплан. Зная характер свободных колебаний мембраны, можно усилить конструкцию параплана и тем самым обеспечить безопасный полет.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение 1985. 472 с.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.
3. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. A note on vibrating triangular equilateral plates subject to a hydrostatic state of in-plane stress // Journal of sound and vibration. 1991. №149. pp. 513-515.
4. Liew K.M. On the use of pb-2 Rayleigh-Ritz method for free flexural vibration of triangular plates with curved internal supports // Journal of sound and vibration. 1993. №165. pp. 329-340.
5. Mirza S., Bijlani M. Vibration of triangular plates // AIAA journal. 1983. №21. pp. 1472-1475.
6. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Колебания треугольной упругой пластины под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения // Известия инженерно технологической академии чувашской республики. 1998. №11. С. 87-95.
7. Чернышов А.Д., Чернышов Н.А. Влияние вязкости на колебания треугольной пластины // Актуальные проблемы механики оболочек. 1998. С. 237-243.

8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. СПб.: Лань, 2008. Ч. 2, 464 с.
10. Чернышов Н.А. Моделирование колебания мембраны треугольной формы. // Инженерный вестник Дона, 2020, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2020/6336.

References

1. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Vibrations in engineering]. M.: Mashinostroenie 1985. 472 p.
2. Sobolev S.L. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966. 444 p.
3. Laura P.A.A., Gutierrez R.H. Journal of sound and vibration. 1991. №149. pp. 513-515.
4. Liew K.M. Journal of sound and vibration. 1993. №165. pp. 329-340.
5. Mirza S., Bijlani M. AIAA journal. 1983. №21. pp. 1472-1475.
6. Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Izvestija inzhenerno tehnologicheskoj akademii chuvashskoj respubliki, 1998, №11, pp. 87-95.
7. Chernyshov A.D., Chernyshov N.A. Aktual'nye problemy mehaniki obolochek, 1998, pp. 237-243.
8. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977. 736 p.
9. Fihtengol'c G.M. Osnovy matematicheskogo analiza [Fundamentals of mathematical analysis]. Spb.: Lan’ 2008. №. 2, 464 p.
10. Chernyshov N.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2020, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2020/6336.