Моделирование сбоев и их устранение на финансовых рынках с потоком событий, порожденным бинарным деревом

И.В. Павлов, О.В. Назарько

Рассмотрим стохастический базис $\left(\Omega, (\mathsf{F}_n)_{n=0}^{N}, P\right)$, где Ω — конечное множество исходов на некотором финансовом рынке; F_n — σ-алгебра событий на этом рынке, доступных для наблюдения до момента времени N включительно; P — вероятностная мера, нагружающая все атомы финальной σ-алгебры F_N.

Определение. Под сбоем понимается такая ситуация на рынке акций, когда при временной эволюции рынка новые события возникают, однако дисконтированная цена акции (какого-то фиксированного типа) не изменяется.

Например, пусть $(Z_n, \mathsf{F}_n)_{n=0}^{N}$ — адаптированный случайный процесс, представляющий собой эволюцию дисконтированной цены акции определенного типа, и атом C σ-алгебры F_n таков, что $C = A + B$, где A и B есть атомы σ-алгебры F_{n+1}. Если выполняется равенство $Z_{n+1}(A) = Z_{n+1}(B) = Z_n(C)$, то это и означает, что в момент времени n на атоме C произошел сбой.

В работах [1,2] было доказано, что отсутствие сбоя равносильно интерполяционному свойству финансового рынка, названному свойством хааровской единственности (СХЕ). Из этого результата вытекает, что при наличии хотя бы одного сбоя неполный и безарбитражный финансовый рынок не может быть преобразован посредством хааровской интерполяции в полный и безарбитражный рынок.

Настоящая статья посвящена моделированию сбоев на финансовых рынках с потоком событий, порожденным бинарным деревом (важность такой модели демонстрирует монография [3] и работы [4–6]). В ней описывается работа одного из модулей созданного авторами программного комплекса. Основная цель работы — показать, что переходом от исходной (физической) вероятностной меры P к эквивалентной ей слабой деформации $\mathbf{Q}$ можно «исправить» рынок со сбоем таким образом, что он будет обладать единственной строго эквивалентной деформации $\mathbf{Q}$ мартингальной деформацией (терминология разъясняется в [7]). Сбои можно моделировать и на других рынках (см. [8-9]). Относительно применений см. также [10].

В программном комплексе реализовано автоматическое моделирование сбоев. Допущения: 1) количество сбоев в любой момент времени ограничено сверху числом d (d задается в зависимости от конкретной задачи); 2) могут существовать моменты времени, в которых $d = 0$ (нет сбоев) 3) на атомах A и B, возникших после сбоя, плотность h деформации задается равенствами $h(A) = c$ и $h(B) = \frac{1}{c}$. Если c мыслится как случайная величина с областью значений в интервале $(0,1)$, то ее значение при каждом сбое моделируется заново. В частном случае, если $c = const$, эта константа едина для всех сбоев.

Имитационное моделирование сбоев осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. В рамках рассматриваемой модели сбой может произойти в каждый момент времени с заданной заранее фиксированной вероятностью $q^{/}$.

2. Если в какой-то момент времени сбой происходит, то моделирование его величины производится на случайным образом выбранном атоме. Если при этом $d > 1$, то случайным образом отбираются еще $d - 1$ атомов и каждый из этих атомов экзаменуется на наличие сбоя (вероятность наличия сбоя на каждом из этих атомов обозначается $q^{//}$).

3. После сбоя цена акции опять ведет себя в соответствии с исходными параметрами ее эволюции.

Описанная выше процедура реализована в виде плагина, который в случае надобности подключается к основной программе. В следующем примере сбои моделируются в рамках классической CRR-модели (модели Кокса-Росса-Рубинштейна).

Пример. Создадим CRR-модель с параметрами, приведенными на рисунке 1 (буквы a и b стандартным образом отражают случайную процентную ставку по акции, а буква r — процентную ставку банковского счета). Так как $r = 0$, то выбран дисконтированный рынок.

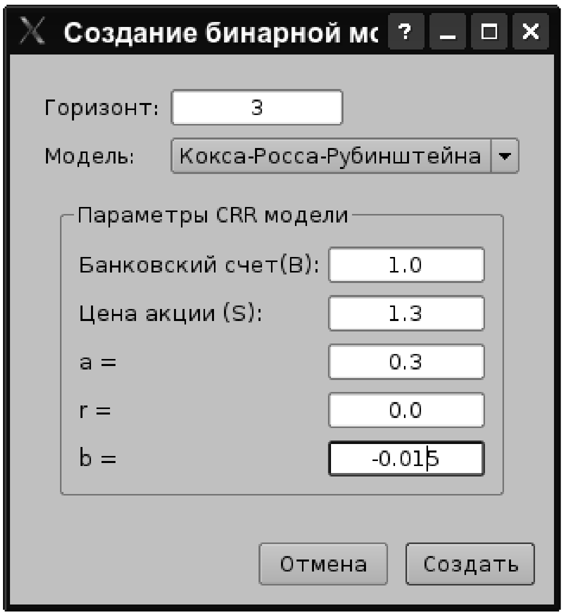

Рис. 1. Параметры CRR-модели

Созданное программой дерево модели показано на рисунке 2.

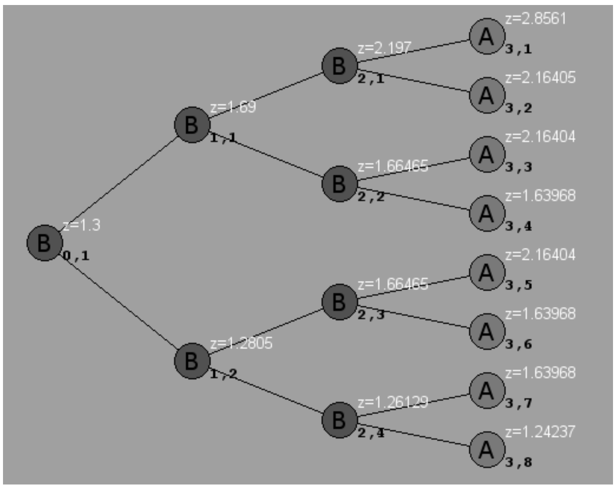

Рис. 2. Дерево модели

Если в какой-то момент времени в модели возникает сбой, то в результате полная и безарбитражная модель финансового рынка превращается в неполную. Сбой моделируется с параметрами, указанными на рис. 3, где $p(\textit{сбоя}) = q^{/}$, а $p(\textit{сбоя}(A)) = q^{//}$ (см. пункт 2 алгоритма).

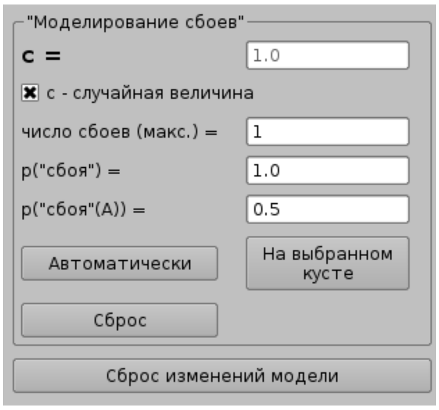

Рис. 3. Параметры моделирования сбоев

В результате получаем процесс эволюции цены акции со сбоями (нижний индекс — временной, а верхний указывает номер атома): $Z(A_0^1) = 1.3$, $Z(A_1^1) = 1.3$, $Z(A_1^2) = 1.3$, $Z(A_2^1) = 1.69$, $Z(A_2^2) = 1.2805$, $Z(A_2^3) = 1.3$, $Z(A_2^4) = 1.3$, $Z(A_3^1) = 2.197$, $Z(A_3^2) = 1.66465$ $Z(A_3^3) = 1.66465$, $Z(A_3^4) = 1.26129$ $Z(A_3^5) = 1.69$, $Z(A_3^6) = 1.2805$, $Z(A_3^7) = 1.3$, $Z(A_3^8) = 1.3$. Получили неполный рынок.

Для выбора типа платежного обязательства предназначена специальная панель. С ее помощью задаем f_3 как опцион продажи при цене поставки цену $K = 3$. А именно, $f_3^1 = 0.803$, $f_3^2 = 1.33535$, $f_3^3 = 1.33535$, $f_3^4 = 1.73871$, $f_3^5 = 1.31$, $f_3^6 = 1.7195$, $f_3^7 = 1.7$, $f_3^8 = 1.7$. Применяя технику мартингальных деформаций, можно вычислить полный капитал самофинансируемого портфеля. Вычисления показывают, что аналог справедливой цены выбранного платежного обязательства f_3 равен 1,7.

Метод хааровских интерполяций, разработанный в [1,2], к сожалению, не позволяет интерполировать построенный рынок до полного и рассчитать соответствующий совершенный хедж.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-00637а

Литература:

1. Богачева М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных [Текст] // УМН, 2002. – Т. 57. – Вып. 3. – С. 143-144.
2. Богачева М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных [Текст] // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2002. – №3. С. 16-24.
3. Shreve S.E. Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model [Текст] // Springer Verlag N.Y., 2004. – 187 p.
4. Schumacher N. Binomial option pricing with nonidentically distributed returns and its implications [Текст] // Mathematical and Computer Modeling, 1999. – №29. – P. 121–143.
5. Detemple J., Sundaresan S. Nontraded asset valuation with portfolio constraints: a binomial approach [Текст] // The Review of Financial Stadies, 1999. – Vol. 12. – №4. – P. 835–872.
6. Favero G. Shortfall risk minimization under model uncertainty in the binomial case: adaptive and robust approaches [Текст] // Math. Meth. Oper. Res., 2001. – №53. – P. 493–503.
7. Назарько О.В. Слабые деформации на бинарных финансовых рынках [Текст] // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2010. – Вып. 1. – С. 12–18.
8. Назарько О.В., Павлов И.В. Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией [Текст] // Вестник РГУПС, 2012. – №1. – С. 200–208.
9. Красий Н.П. О вычислении спрэда для обобщённой модели (B,S)-рынка в случае скупки акций [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4 (часть 2). – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1378 (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.
10. Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. Моделирование оптимальной полосы пропускания телекоммуникационных каналов при условии гарантированной и негарантированной доставки пакетов [Электронный ресурс] // «Инженерный Вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/652 (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.